Rom 51 / 10

Poštarina plaćena u gotovu

HRVATSKO PRIRODOSLOVNO DRUŠTVO

SOCIETAS SCIENTIARUM NATURALIUM CROATICA

GLASNIK

MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

PERIODICUM

MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

SERIJA II.

T. 8 — 1953. — No. 4

Zagreb 1953

Izdaje Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske

Editio Societatis mathematicorum et physicorum Croatiae

»GLASNIK MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI« SLUŽBENO JE GLASILO MATEMATIČKO-FIZIČKOG ODSJEKA PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKOG FAKULTETA U ZAGREBU.

SADRŽAJ

V. Devidé:	Über ein Modell der euklidischen Geometrie	241
	O jednom modelu euklidske geometrije	246
R. Vernić:	Periodische Lösungen im Dreikörperproblem	247
	Periodična rješenja problema triju tijela	265
V. S. Vrkljan:	Prilog Darwinovu izvođenju magnetičkoga momenta elektrona i pozitrona	267
	Beitrag zur Darwinschen Ableitung des magnetischen Moments des Elektrons und des Positrons	269
G. Kurepa:	Real and ordinal numbers as sets of rational numbers	270
	Realni i redni brojevi definirani kao skupovi racionalnih brojeva	278
S. Mardešić:	Über die Unabhängigkeit mod (G) der ganzzahligen Linearformen	280
	O nezavisnosti mod (G) cjelobrojnih linearnih formi	290
V. Niče:	Über die isotropen Strahlenpaare 2. Art. der Strahlenkongruenzen I. Ordnung 3., 2. und 1. Klasse	293
	O izotropnim zrakama 2. vrste u kongruencijama I. reda 3., 2. i 1. razreda	295
M. Bajraktarević:	O rješenjima jedne funkcionalne jednačine	297
	Sur les solutions d'une équation fonctionnelle	300
S. Hondl:	Osvrt na jednu raspravu M. Katalinića	301
	Iz Matematičko-fizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu	
	Četiri nova doktora matematičkih nauka	302
	Iz Društva matematičara i fizičara NR Hrvatske	
	Održani kolokviji	305
	Publikacije, koje je Društvo primilo u zamjenu za Glasnik u 1953. godini	308
	Rješenja zadataka 172, 173, 174*	314
	Zadaci 180, 181, 182	317
	Sadržaj Glasnika T. 8.	318

VAŽNO UPOZORENJE

Ovom broju Glasnika prilažemo čekove, pa molimo sve članove Društva i pretplatnike, koji još nisu uplatili članarinu odnosno pretplatu za god. 1954., da to odmah učine. Samo onim članovima i pretplatnicima, koji pravovremeno pošalju članarinu ili pretplatu, bit će dostavljeno novo godište Glasnika.

Administracija Glasnika

»Glasnik matematičko-fizički i astronomski« izdaje Društvo matematičara i fizičara NRH godišnje u četiri broja na barem po četiri štampana arka.

Pretplata za 1953. god. iznosi 300 din, članarina (uz besplatno dobivanje Glasnika) za redovne članove 240.— din, a za članove pomagače 180.— din. Za god. 1954. iznosi pretplata 400.— din., redovna članarina 320.— din., a članarina za članove pomagače 240.— din. Pretplata se može slati na administraciju Glasnika, Zagreb, Ilica 16, III. kat ili poštanskim čekom Društvu matematičara i fizičara NRH Br. 406-T-787.

GLASNIK MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI
PERIODICUM MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

Serija II. | Zagreb 1953 | T. 8/No. 4

ÜBER EIN MODELL DER EUKLIDISCHEN GEOMETRIE

Vladimir Devidé, Zagreb

I

Die aus der projektiven Geometrie bekannten Eigenschaften des Pols und der Polare ermöglichen die Konstruktion eines Modelles $\mathfrak{M}$ der euklidischen Geometrie (EG) auf einer Fläche, die topologisch ein Möbius'sches Blatt ist, und in welchem eine Gerade einen »Punkt« repräsentiert und umgekehrt.

1. In der euklidischen Ebene P sei eine nichtdegenerierte Kurve zweiter Ordnung k gegeben. Ergänzen wir P durch die unendlich ferne Gerade u zur projektiven Ebene Π, und schliessen wir aus dieser den Pol O von u bezüglich k aus, so erhalten wir eine Fläche M die, topologisch, ein Möbius'sches Blatt ist.

Pol (a) (Polare (A)) soll im weiteren den Pol der Geraden a (die Polare des Punktes A) bezüglich k, in Π bedeuten.

Jeden Punkt $p \in$ M nennen wir eine »Gerade« p, und jede Gerade $T \in$ M (die, da nicht $O \in$ M ist, nicht durch $O \in \Pi$ laufen kann) nennen wir einen »Punkt« T. (Der »Punkt« T ist also durch eine *geschlossene* Linie — die projektive Gerade — gegeben, und die »Gerade« p durch einen Punkt — aber eine Gerade *kann nicht* ringsum diesen Punkt p rotieren, da sie die Lage pO nicht passieren kann; im Einklang damit, dass eine Gerade als Element von P ringsum einen ihrer Punkte als $\in$ P rotieren *kann*, und dass ein Punkt, von einer bestimmten Lage an beginnend, eine ganze Gerade im selben Sinne *nicht* durchlaufen *kann*.) Der »Punkt« $T \in$ M *liegt* in der »Geraden« $p \in$ M (die »Gerade« p *läuft durch* den »Punkt« T), wenn die Gerade $T \in \Pi$ durch den Punkt $p \in \Pi$ läuft. Zwei »Geraden« p, $q \in$ M sind *parallel*, wenn sie keinen gemeinsamen »Punkt« $T \in$ M besitzen. Der »Punkt« $B \in$ M liegt *zwischen* den »Punkten« $A, C \in$ M wenn der Punkt [Pol ($B \in \Pi$)] $\in$ P zwischen den Punkten [Pol ($A \in \Pi$)], [Pol ($C \in \Pi$)] $\in$ P liegt. (Es ist leicht einzusehen: liegt die »Gerade« $p \in$ M die die »Punkte« $A, C \in$ M verbindet — in Π der Schnittpunkt der Geraden A, C — nicht an u, so liegt der »Punkt« $B \in$ M dann und nur dann zwischen den Punkten $A, C \in$ M, wenn in Π die Geradenpaare A, C; B, Op ein-

ander trennen.) Der *»Abstand«* d zweier »Punkte« $A, B \leqslant \mathrm{M}$ ist gleich dem Abstand der Punkte [Pol ($A \leqslant \Pi$)], [Pol ($B \leqslant \Pi$)] $\leqslant \mathrm{P}$. Der *»Winkel* $\alpha = \sphericalangle(a, b)$ zweier »Geraden« a, $b \leqslant \mathrm{M}$ ist gleich dem Winkel der Geraden [Polare ($a \leqslant \Pi$)], [Polare ($b \leqslant \Pi$)] $\leqslant \mathrm{P}$.

2. Nach der Konstruktion von $\mathfrak{M}$, die im wesentlichen auf der Zuordnung Pol $\rightleftarrows$ Polare gegründet ist, ist es klar, dass mit $\mathfrak{M}$ ein Modell zweidimensionaler (metrischer) EG realisiert ist. Dies bedeutet, da den »Punkten« und »Geraden« als Elementen von M, und Beziehungen unter ihnen, Gerade und Punkte als Elemente von P, und Beziehungen unter ihnen entsprechen, dass *jedem* Satze der EG in M (und nicht nur Sätzen die keine Metrik implizieren, und welche schon in der projektiven Geometrie Dualsätze besitzen), nach der Wahl einer bestimmten nichtdegenerierten Kurve 2. Ordnung k ein »k-dualer« Satz der EG in P entsprechen wird (und umgekehrt) — natürlich unter der Einschränkung, dass die Figuren in M (P), über welche die Sätze bestimmte Behauptungen äussern, die Gerade u (den Punkt O) nicht enthalten dürfen, da sie sonst beim Übergange $\mathrm{M} \to \mathrm{P}$ ($\mathrm{P} \to \mathrm{M}$) nicht ohne weiteres auch als Figuren in P (M) gedeutet werden könnten.

Dass $\mathfrak{M}$ in der Tat ein Modell der EG ist, kann indessen auch direkt nachgeprüft werden, indem die Gültigkeit aller Axiome der ebenen EG in $\mathfrak{M}$ verifiziert wird. Dabei müssen stets die Folgen im Auge gehaltet werden, die in $\mathfrak{M}$ die bei der Konstruktion von M vorgenommene Ausschliessung des ausgezeichneten Punktes O von Π hat. Die EG in P wird natürlich vorausgesetzt.

3. Zu diesem Zwecke ist zunächst eine Betrachtung einiger elementaren Konstruktionen in M notwendig, wie sie nach 1. durchzuführen sind.

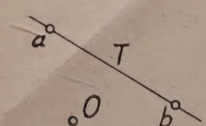


Abb. 1

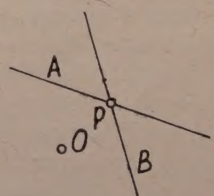


Abb. 2

a) Der »Punkt« $T \leqslant \mathrm{M}$ in dem sich die »Geraden« $a, b \leqslant \mathrm{M}$ schneiden, wird — falls er vorhanden ist — als die die Punkte $a, b \leqslant \Pi$ verbindende Gerade $T \leqslant \Pi$ gefunden, falls diese (in M) vorhanden ist, d. h. falls sie in Π nicht durch O läuft. (Abb. 1)

b) Die »Gerade« $p \leqslant \mathrm{M}$ welche durch die »Punkte« A, $B \leqslant \mathrm{M}$ hindurchläuft, wird als Schnittpunkt p der Geraden A, $B \leqslant \Pi$ gefunden. (Abb. 2)

c) Anlegung der, einer gegebenen »Strecke« $\overline{AB}$ kongruenten »Strecke« CD, von dem gegebenen »Punkte« C aus, auf die gegebene »Gerade« p. (vgl. Abb. 3; ist N ein »Punkt« und n eine »Gerade« aus M, so ist der Pol $(N) \leqslant \Pi$ mit N', und die Polare $(n) \leqslant \Pi$ mit n' bezeichnet.)

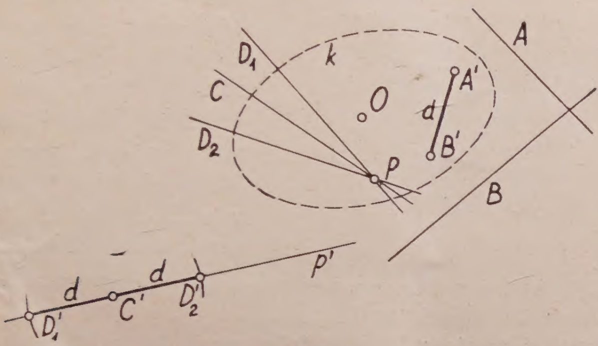


Abb. 3

d) Anlegung eines gegebenen »Winkels« (analog wie in c), vgl. Abb. 4).

e) Konstruktion der »Geraden« $a \leqslant$ M durch den gegebenen »Punkt« $A \leqslant$ M, parallel der gegebenen »Geraden« $b \leqslant$ M (vgl. Abb. 5.)

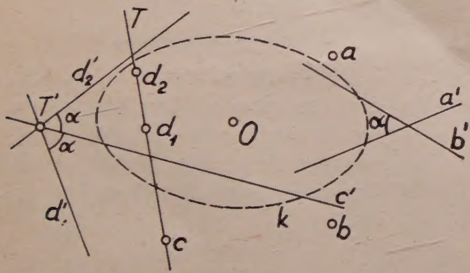


Abb. 4

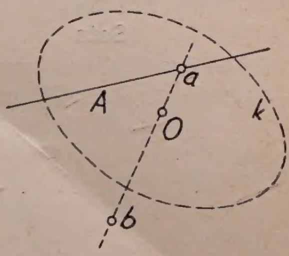


Abb. 5

4. Jetzt ist es leicht die Gültigkeit der Hilbertschen Axiome der *EG* in $\mathfrak{M}$ zu verifizieren.

Dass die *Verbindungsaxiome* erfüllt sind, folgt direkt aus 1.

Die Axiome der *Anordnung* sind ebenfalls erfüllt; es sei nur die Verifizierung des Axioms von *Pasch* erwähnt: Sind $A, B, C \leqslant$ M drei nicht in einer »Geraden« gelegene »Punkte«, und ist $p \leqslant$ M eine »Gerade« die keinen der »Punkte« A, B, C trifft, und die durch einen »Punkt« der »Strecke« $\overline{BC}$ geht, so geht sie auch entweder durch einen »Punkt« der Strecke $\overline{AB}$, oder durch einen

»Punkt« der »Strecke« $\overline{AC}$. — Dass dies in $\mathfrak{M}$ zutrifft, zeigt folgende Betrachtung in P[1]: Befindet sich der Punkt $p \leqslant$ M in dem (horizontal schraffierten) Teil von Π zwischen den Geraden $B, C \leqslant$ M der O nicht enthält, so befindet er sich auch entweder in dem (fallend schraffierten) Teil von Π zwischen $A, B \leqslant$ M der O nicht enthält, oder in dem (steigend schraffierten) Teil von Π zwischen $A, C \leqslant$ M der O nicht enthält. (Abb. 6)

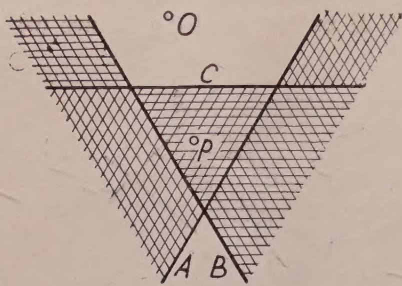


Abb. 6

Die Gültigkeit der *Kongruenzaxiome* und der *Stetigkeitsaxiome* folgt aus ihrer Gültigkeit in P.

Das *Parallelenaxiom* ist ebenfalls, nach 3e) erfüllt (da sich in Π irgend zwei (projektive) Geraden $A \leqslant$ M, Ob in einem Punkte $a \neq O$ schneiden müssen).

II

5. Zeigen wir jetzt an einigen Beispielen wie sich mittels $\mathfrak{M}$ einige Sätze der *EG* in neuer Fassung deuten lassen, wenn ein »Punkt« (»Gerade«) von M wieder als eine Gerade (Punkt) in P interpretiert wird. (Dabei ist stets im Auge zu halten, dass $O \leqslant$ P, aber nicht $O \leqslant$ M; dagegen $u \leqslant$ M, aber nicht $u \leqslant$ P.)

Satz

1. Die drei »Mittellinien« t_a, t_b, t_c eines Dreiecks *ABC* schneiden sich in einem »Punkte« *T*.

»*k*-dualer« Satz

1'. Die Schnittpunkte t_a, t_b, t_c der Aussenwinkelhalbierenden eines Dreiecks *abc* und der ihnen gegenüberliegenden Seiten *A*, *B*, *C* liegen in einer Geraden *T*. (vgl. Abb. 7.)

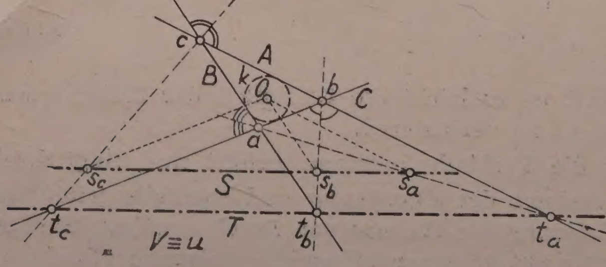


Abb. 7

[1]) Wir nehmen an, dass *AB*, *BC*, *CA* $\leqslant M$ nicht an u liegen; es ist leicht einzusehen, dass damit keine wesentliche Einschränkung vorgenommen wird, da die übrigen Fälle unschwer zu erledigen sind.

Da 1. in $\mathfrak{M}$ richtig ist, so folgt wenn für k der Inkreis von ABC gewählt wird, mit (M → P) die Richtigkeit von 1′.

Analog würden mit k als Ankreis Sätze über die Existenz von Geraden T_a, T_b, T_c folgen. (vgl. Abb. 8.)

2. Die drei »Seitensimetralen« s_a, s_b, s_c eines Dreiecks ABC schneiden sich in einem »Punkte« S.

2′. Die drei Schnittpunkte s_a, s_b, s_c der Aussenwinkelhalbierenden eines Dreiecks abc und der durch den Inkreismittelpunkt O des Dreiecks gehender Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten liegen in einer Geraden S. (vgl. Abb. 7)

(Um das Zutreffen von 2′ einzusehen, ist für k wieder der Inkreis von ABC zu wählen.)

Analoge Sätze folgen mit k als Ankreis. (Abb. 8)

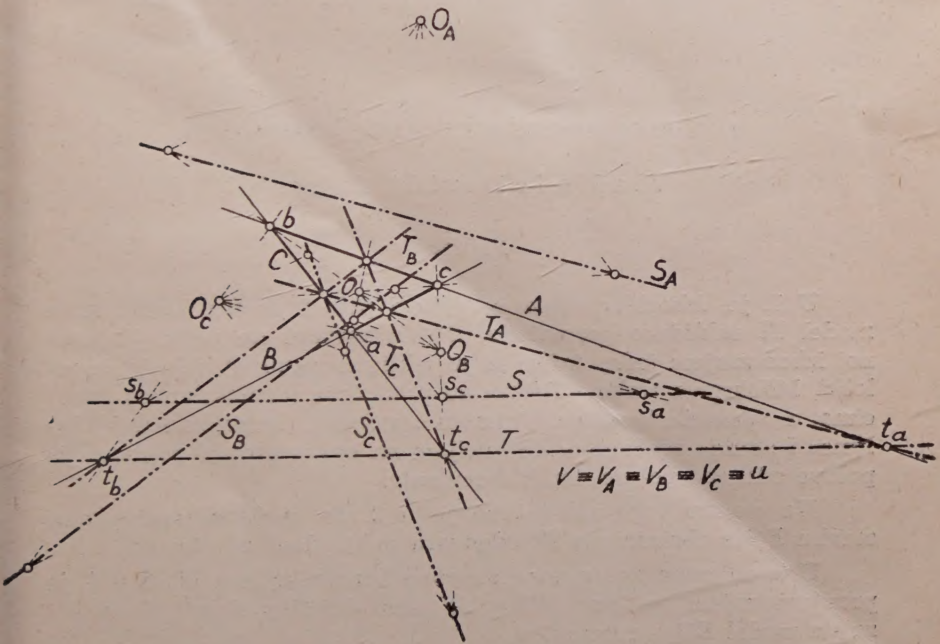


Abb. 8

3. Die »Punkte« T, S und der »Höhenschnittpunkt« V eines Dreiecks ABC liegen in der Eulerschen »Geraden«, und es ist $VS : VT = 3 : 2$.

3′. Die (in 1′, 2′ gefundenen) Geraden T, S sind einander parallel und für ihre Entfernungen vom Inkreismittelpunkte des Dreiecks gilt $OS : OT = 2 : 3$ (vgl. Abb. 7.)

Analoge Sätze folgen mit k als Ankreis. (Abb. 8)

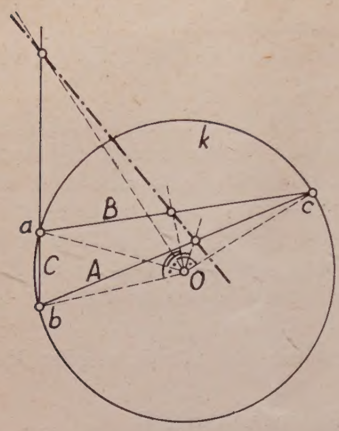


Abb. 9

Aus dem Satze über den Höhenschnittpunkt und mit k als Umkreis folgt:

4'. Die drei Schnittpunkte der Seiten eines Dreiecks mit den durch den Umkreismittelpunkt O gelegenen Senkrechten zu den Verbindungslinien von O mit den gegenüberliegenden Ecken, liegen in einer Geraden. (Abb. 9)

usw.

Ein entsprechender Gedankengang kann zur Konstruktion von Modellen ($n > 2$)-dimensionaler EG verwendet werden.

O JEDNOM MODELU EUKLIDSKE GEOMETRIJE

Vladimir Devidé, Zagreb

Sadržaj

U 1. je, iskorištavanjem svojstava pola i polare, konstruiran model $\mathfrak{M}$ euklidske geometrije (EG) u ravnini na plohi (dobivenoj izbacivanjem jedne točke iz projektivne ravnine) koja je, topološki, Möbiusova traka. »Točke« su predočene (projektivnim) pravcima, a »pravci« točkama. Pojmovi »između«, »paralelnosti«, »duljine« i »kuta« svedeni su definicijom na odgovarajuće pojmove za polove odnosno polare danih elemenata.

Na osnovu toga zaključeno je u 2. da svakom (*metričkom*) stavku EG s obzirom na $\mathfrak{M}$ odgovara neki »dualan« stavak.

U 3. su razmotrene neke osnovne konstrukcije u $\mathfrak{M}$, a u 4. je provjeravanjem aksioma EG u $\mathfrak{M}$ dan direktan dokaz da je $\mathfrak{M}$ zaista model EG u ravnini.

U 5. je navedeno nekoliko primjera »dualnih« stavaka nekih stavaka o karakterističnim točkama trokuta.

Na analogan način mogu se konstruirati i modeli višedimenzionalne EG.

(Primljeno 1. III. 1953)

PERIODISCHE LÖSUNGEN IM DREIKÖRPERPROBLEM

Radovan Vernić, Zagreb

1.

Theorem I: Das Dreikörperproblem lässt sich vollständig durch die Transformation vom SUNDMANschen Typus

$$dt = S(r)\,du \tag{1}$$

regularisieren, wo $S(r) \equiv S(r_1, r_2, r_3)$ eine sog. SUNDMANsche Funktion ist, die symmetrisch und homogen 1^0 in allen drei Distanzen $r_i \equiv \overline{m_j m_k}$ $(i = 1, 2, 3)$ ist. Insbesondere gilt das von der Transformation SUNDMAN-LEVI CIVITA

$$dt = \frac{du}{V} \tag{2}$$

wo V das Potential $(= -E_{pot})$ des Systems materieller Punkte m_i $(i = 1, 2, 3)$ bedeutet. Die Lösungen des Problems sind mittels des Parameters u uniformisiert:

$$r_i = r_i(u) \quad (i = 1, 2, 3), \quad t = T(u) \tag{3}$$

womit jedem Werte der Zeit t aus $(-\infty, +\infty)$ genau ein Tripel der Distanzen r_i zugeordnet ist*).

Beweis: a) Die Differentialgleichungen des Problems

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z_i} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{4}$$

sind genau für die Zusammenstösse $r_i = 0$ singulär; entweder beim binären oder Zweierstoss $r_i = 0$ für ein bestimmtes i, oder beim ternären oder Dreierstoss (allgemeine Kollision) mit $r_1 = r_2 = r_3 = 0$. Das sind zugleich genau alle Singularitäten der Lösungen des Dreikörperproblems (PAINLEVÉ 1897, SUNDMAN 1907).

b) Wir führen die Transformation (1) aus:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx_i}{dt}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{dx_i}{du}\cdot\frac{du}{dt}\right)\frac{du}{dt} = \frac{1}{S}\cdot\frac{d}{du}\left(\frac{1}{S}\cdot\frac{dx_i}{du}\right).$$

---

* Für alle vorkommenden Begriffe, Bezeichnungen, Literatur und anderes vgl.: *R. Vernić, Diskussion der Sundmanschen Lösung des Dreikörperproblems* (Zagreb 1953).

Dann wird das transformierte Differentialgleichungssystem des Problems:

$$\frac{d}{du}\left(\frac{1}{S}\cdot\frac{dx_i}{du}\right)=\frac{S}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i},\ldots; \tag{5}$$

oder:

$$\frac{d^2 x_i}{du^2}=\left(\frac{1}{S}\cdot\frac{dS}{du}\right)\cdot\frac{dx_i}{du}+\frac{S^2}{m_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i},\ldots; \tag{6}$$

c) Nun werden gemäss den Grenzrelationen für binäre Zusammenstösse (SUNDMAN 1909) *und* ternäre Zusammenstösse (SUNDMAN 1907 — VERNIĆ 1950) die einzelne Grössen Null in folgenden Potenzen von r_i:

$$S \backsim r^1,\ \frac{\partial S}{\partial r_k}\backsim r^0;\ \frac{dr_k}{dt}\backsim\frac{dx_i}{dt}\backsim r^{-\frac{1}{2}},\ \frac{\partial r_k}{\partial x_i}\backsim r^0,\ \frac{\partial V}{\partial r_k}\backsim r^{-2}.$$

Daher wird:

$$\frac{dx_i}{du}=S\cdot\frac{dx_i}{dt},\quad \frac{d^2x_i}{du^2}=S\,\frac{dx_i}{dt}\cdot\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial S}{\partial r_k}\cdot\frac{dr_k}{dt}+\frac{S^2}{m_i}\cdot\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial V}{\partial r_k}\cdot\frac{\partial r_k}{\partial x_i}$$

regulär.

Es sei t_0 der Stossmoment, so wird beim Grenzübergang $t\to t_0, u\to u_0$:

$$\lim_{u\to u_0}\frac{dx_i}{du}=C\cdot\lim_{t\to t_0} r^{1-\frac{1}{2}}=C\cdot\lim_{t\to t_0} r^{\frac{1}{2}}=0;$$

$$\lim_{u\to u_0}\frac{d^2x_i}{du^2}=\left\{C'\cdot r^1\cdot r^{-\frac{1}{2}}\sum r^0\cdot r^{-\frac{1}{2}}\right\}_0+\left\{C''\cdot r^2\cdot\sum r^{-2}\cdot r^0\right\}_0=$$

$$=C'\left\{r^{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\right\}_0+C''\left\{r^{2-2}\right\}_0=C'\cdot r_0{}^0+C''\cdot r_0{}^0=C'+C''=C$$

und zwar ist $C\neq 0,\infty$.

d) Daher können wir aus den Diffferentialgleichungen (6) alle höheren Ableitungen $x_i''', \ldots, x_i^{(n)}\ldots;\ldots;$ und damit die analytische reguläre Lösung durch Differentiationen und Eliminationen allein berechnen:

$$x_i(0)=\left(\frac{dx_i}{du}\right)_0=0,\ldots;\quad\left(\frac{d^2x_i}{du^2}\right)_0\neq 0,\ldots; \tag{7}$$

$$x_i(u)=\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{d^\nu x_i}{du^\nu}\right)_0\cdot u^\nu\equiv P_2(u),\ldots; \tag{8}$$

und daraus und aus (1):

$$t=T(u)\equiv P_3(u). \tag{9}$$

e) Insbesondere gilt der Beweis für die Transformation (2) mit dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{du}\left(V\frac{d\,x_i}{d\,u}\right)=\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial\, l\,n\,V}{\partial\, x_i},\ \ldots; \tag{5*}$$

oder:

$$\frac{d^2 x_i}{d\,u^2}=-\frac{1}{V}\,\frac{d\,V}{d\,u}\cdot\frac{d\,x_i}{d\,u}+\frac{1}{m_i\,V^2}\cdot\frac{\partial\,V}{\partial\,x_i},\ \ldots; \tag{6*}$$

w. z. b. w.

Theorem II: Die Formel von LAGRANGE (1772) im Dreikörperproblem

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2 J}{d\,t^2}=V+2\,h \tag{10}$$

(h = Gesamtenergie) mit der LAGRANGEschen Funktion (polares Trägheitsmoment)

$$J\equiv\sum_{i=1}^{3}\frac{r_i^2}{m_i} \quad (11) \qquad \text{bzw.} \qquad J\equiv\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_j\, m_k\, r_{jk}^2 \quad (11^*)$$

je nachdem wir die relative oder absolute Bewegung betrachten, und wo

$$V=\sum_{i=1}^{3}\frac{M}{m_i\,r_i} \quad (12) \qquad \text{bzw.} \qquad V\equiv\sum_{i=1}^{3}\frac{m_j m_k}{r_{jk}} \quad (12^*)$$

ist, lautet nach der Regularisierung (Uniformisierung) (2):

$$\frac{d}{d\,u}\left(V\frac{d\,J}{d\,u}\right)=2\left(1+\frac{2\,h}{V}\right) \tag{13}$$

(VERNIĆ 1951).

Theorem III: Für die periodischen Lösungen des Dreikörperproblems sind die LAGRANGEsche Funktion und das Potential periodische Funktionen derselben Periode.

Beweis: a) Es sei die allgemeine Lösung des Dreikörperproblems durch die Formeln (3) dargestellt. Dann sind die periodischen Lösungen mittels

$$r_i\,(t+\tau)=r_i\,(t) \quad (i=1,2,3) \tag{14}$$

charakterisiert. Die Zeit ist aber eine monotone Funktion des uniformisierenden Parameters u (SUNDMAN 1907), also niemals periodisch:

$$T\,(0)=0\,, \quad T\,(\omega)=\tau \tag{15}$$

$$\frac{d\,T}{d\,u}=\frac{1}{V(u)}\geqq 0. \tag{16}$$

Dann folgt:

$$r_i\,(\omega)=r_i\,(0)=r_i^0\,, \quad r_i\,(u+k\,\omega)=r_i\,(u)$$
$$(i=1,2.3\,;\ k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)\,. \tag{17}$$

b) Somit gilt nach den Definitionen (11) (12) gleichzeitig:

$$J(u+k\,\omega)=J(u)\,, \quad V(u+k\,\omega)=V(u) \tag{18}$$

w. z. b. w.

T h e o r e m IV: Die periodischen Lösungen des Dreikörperproblems sind unter den periodischen Lösungen der Gleichung (13) enthalten.

Beweis: a) Nach Satz III ergeben periodische Lösungen des Dreikörperproblems (17) gewiss periodische Lösungen (18) der Gleichung (13).

b) Daraus folgt jedoch noch nicht die Umkehrung. Es ist zwar

$$r_i^2 \geqq 0\,, \quad r_i \geqq 0\,; \quad J \geqq 0\,, \quad V \geqq 0 \tag{19}$$

für alle u. Aber beide Gleichungen (18) sind in r_1, r_2, r_3 erst zwei Gleichungen für drei Unbekannten und es gibt im besten Falle (wenn beide Gleichungen gleichzeitig gelten) noch immer ∞^1 Tripel $\{r_1\, r_2\, r_3\}$ so dass neben (18) die Gleichungen (17) nicht erfüllt sind; alle diese Tripel sind untereinander verschieden. W. z. b. w.

L e m m a I: Die Ergebnisse der Untersuchungen über die Gleichung (13) im allgemeinen Dreikörperproblem gelten nicht notwendig auch für das restringierte Dreikörperproblem in besonderen relativen Koordinatensystemen.

Beweis: a) Dann wird nämlich in (11) (12) wegen $m_3 = 0$ dauernd $J = \infty$, $V = \infty$ und die Formeln verlieren ihren Sinn.

b) In absoluten Koordinaten dagegen gelten (11*) (12*) nach wie vor, die »Trägheit« und Energie beziehen sich hier auf die beiden endlichen Massen, nur der dritte Term m_3 verschwindet. W. z. b. w.

L e m m a II: Die notwendige Bedingung für periodische Lösungen im allgemeinen Dreikörperproblem ist $h < 0$.

Beweis: a) Es sei im Gegenteil $h > 0$. Wegen (19) folgt aus (13) jedenfalls $\frac{d}{du}\left(V\frac{dJ}{du}\right) > 0$. Also nimmt $\left(V\frac{dJ}{du}\right)$ mit u immer zu, es muss daher auch $V\frac{dJ}{du} > 0$ werden; das ergibt wieder $\frac{dJ}{du} > 0$. Nun muss $J(u)$ immer zunehmen, kann demnach nicht periodisch sein. Nach Satz IV noch weniger die $r_i(u)$.

b) Für $h = 0$ bleibt sogar $\frac{d}{du}\left(V\frac{dJ}{du}\right) = 2$, $V\frac{dJ}{du} = 2u + V_0\left(\frac{dJ}{du}\right)_0 > 0$, u. s. w. wie für $h > 0$. W. z. b. w.

T h e o r e m V: Das allgemeine Integral der Gleichung (13) lautet

$$J(u) = 2\left\{h\,T^2(u) + u\,T(u) - \int_0^u T(\xi)\,d\xi\right\} + V(0)\left(\frac{dJ}{du}\right)_0 \cdot T(u) + J(0). \tag{20}$$

Beweis: a) Die Transformation (2) ergibt für (3_2) die Form (wegen (15))

$$T(u) = \int_0^u \frac{d\xi}{V(\xi)}, \quad T(0) = 0. \tag{21}$$

Also ist nach (19) jedenfalls

$$T(-u) \leqq 0, \quad T(u) \geqq 0 \quad (u \geqq 0). \tag{22}$$

Nun integrieren wir (13) einmal und bekommen wegen (21) und (19) mit $V \neq 0$:

$$\frac{dJ}{du} = 2\left\{\frac{u}{V(u)} + 2h\frac{T(u)}{V(u)}\right\} + \frac{V(0)}{V(u)}\left(\frac{dJ}{du}\right)_0. \tag{23}$$

b) Wiederholte Integration ergibt:

$$J(u) - J(0) = 2\left\{\int_0^u \frac{\xi\, d\xi}{V(\xi)} + 2h\int_0^u \frac{T(\xi)\, d\xi}{V(\xi)}\right\} + V_0 J_0' \cdot \int_0^u \frac{d\xi}{V(\xi)}.$$

Die Quadraturen lassen sich ausführen:

$$\int_0^u \frac{\xi\, d\xi}{V(\xi)} = \Big[\xi \cdot T(\xi)\Big]_0^u - \int_0^u T(\xi)\, d\xi = u\,T(u) - \int_0^u T(\xi)\, d\xi;$$

$$2\int_0^u T(\xi)\frac{d\xi}{V(\xi)} = 2\int_0^u T(\xi)\, dT(\xi) = \Big[T^2(\xi)\Big]_0^u = T^2(u).$$

Das ergibt die Behauptung (20); w. z. b. w.

Korollar I: Die Formeln aus Theorem V. sind für den Fall des Zweikörperproblems verifiziert.

Beweis: a) Der Einfachheit halber führen wir den Beweis nur mit den Formeln des elliptischen Falles durch; dieser Fall ist aber für uns hier der wichtigste, weil er allein die reelle periodische Bewegung im Zweikörperproblem darstellt.

Hier hat man (die Konstanten sind hier etwas verschieden von jenen in meiner eingangs zitierten Arbeit, um bessere Analogie mit dem Dreikörperproblem zu erzielen):

$$V = \frac{\mu}{r}, \quad J = \frac{r^2}{a\mu}; \quad \frac{\mu}{a} \cdot \frac{dT}{du} = \frac{r}{a}; \quad \frac{d^2 r}{du^2} + r = a,$$

$$1 : \frac{dT}{du} = \frac{\mu}{r} = \frac{a^3 n^2}{r}.$$

b) Also lautet (20) hier, wegen:

$$J(u) \equiv \frac{a}{\mu}(1 - \varepsilon\cos u)^2, \quad T(u) \equiv \frac{a}{\mu}(u - \varepsilon\sin u), \quad V \equiv \frac{\mu}{a(1 - \varepsilon\cos u)};$$

$$r \equiv a(1 - \varepsilon\cos u)$$

links: $J(u) - J(o) = \frac{a}{\mu}[2\varepsilon - \varepsilon^2 - 2\varepsilon\cos u + \varepsilon^2\cos^2 u]$, während $h =$ $= -\frac{\mu}{2a}$ rechts dasselbe ergibt: $\frac{a}{\mu}[2\varepsilon - \varepsilon^2 - 2\varepsilon\cos u + \varepsilon^2\cos^2 u]$; w. z. b. w.

2.

Theorem IV: Es sei

$$L(J) \equiv \frac{d}{du}\left(p \cdot \frac{dJ}{du}\right) + q \cdot J = f(u) \tag{24}$$

eine lineare Differentialgleichung in selbstadjungierter Form, mit $J_1(u)$, $J_2(u)$ als Fundamentalsystem von Integralen der homogenen Gleichung $L(J) = 0$, deren WRONSKIsche Determinante

$$W(u) \equiv \begin{vmatrix} J_1(u) & J_2(u) \\ J_1'(u) & J_2'(u) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{25}$$

ist. Dann ist eine »Grundlösung« ein partikuläres Integral der homogenen Gleichung

$$\gamma(u,\xi) \equiv \pm \frac{1}{2} \; \frac{J_2(\xi)\,J_1(u) - J_1(\xi)\,J_2(u)}{J_2(\xi)\,J_1'(\xi) - J_1(\xi)\,J_2'(\xi)} \begin{cases} u \geq \xi \\ u \leq \xi \end{cases} \tag{26}$$

dessen Ableitung an der (willkürlichen) Stelle $u = \xi$ einen endlichen Sprung hat, den wir zu $(+1)$ mittels des Nenners $-W(\xi) = = \frac{1}{p(\xi)}$ normieren:

$$\left(\frac{d\gamma}{du}\right)_{\xi+0} - \left(\frac{d\gamma}{du}\right)_{\xi-0} = 1. \tag{27}$$

Das allgemeine Integral der inhomogenen Gleichung $L(J) = f(u)$ lautet dann

$$J(u) = \int_\alpha^\beta \gamma(u,\xi)\, f(\xi)\, d\xi + c_1 J_1(u) + c_2 J_2(u). \tag{28}$$

Für die Randwertaufgabe der Periodizität

$$J_*(0) = J_*(\omega), \quad \left(\frac{dJ_*}{du}\right)_0 = \left(\frac{dJ_*}{du}\right)_\omega \tag{29}$$

wird eine spezielle Grundlösung, die sog. GREENsche Funktion:

$$-W(\xi)\cdot\gamma_0 \equiv G(u,\xi) \equiv \begin{cases} J_2(\xi) J_1(u) \ldots u \geq \xi \\ J_1(\xi) J_2(u) \ldots u \leq \xi \end{cases} \tag{30}$$

gewählt, so dass die Bedingungen »am Rande« (29) erfüllt werden. Dann ist die allgemeinste periodische Lösung der inhomogenen Gleichung durch

$$J_*(u) = \int_0^\omega G(u,\xi) f(\xi)\, d\xi + c_1^* J_1(u) + c_2^* J_2(u) \tag{31}$$

gegeben. Hierbei muss die Integration in zwei Teilen ausgeführt werden $(0 \leq \xi \leq u,\ u \leq \xi \leq \omega)$:

$$\int_0^\omega G(u,\xi) f(\xi)\, d\xi = \int_0^u \left\{J_1(u) J_2(\xi)\right\} f(\xi)\, d\xi + \int_u^\omega \left\{J_2(u) J_1(\xi)\right\} f(\xi)\, d\xi \tag{32}$$

unter Beachtung der Symmetrie

$$G(u,\xi) \equiv G(\xi,u) \qquad \gamma(u,\xi) \equiv \gamma(\xi,u). \tag{33}$$

(Beweis in den Lehrbüchern der Differentialgleichungen, z. B. sehr einfach in: Hoheisel, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Samml. Göschen 920, 2. Aufl. 1930; p. 80 f. und Kap. III.)

Theorem VII: Im allgemeinen Dreikörperproblem führt die Randwertaufgabe der Periodizität auf eine vollständige lineare Differentialgleichung (13) mit $p \neq 0$, $q \neq 0$ dann, wenn

$$J(u) \equiv \frac{R^2(u)}{a\mu}, \quad V \equiv \frac{\mu}{R(u)}, \quad R(u) \equiv \pm a(1 - \varepsilon \operatorname{ch} ku),$$

$$k = \begin{Bmatrix} i \\ 1 \end{Bmatrix}, h \lesseqgtr 0, a \gtrless 0 \tag{34}$$

also im Falle der LAGRANGEschen (konischen homothetischen) exakten Lösungen.

Beweis: a) Wirklich ist nach Korollar I und den bekannten Eigenschaften der exakten Lösungen von LAGRANGE (1772) die Gleichung linear und vollständig ($p \neq 0$, $q \neq 0$ in (24)): $r_i \equiv \varrho_i \cdot R$, $\varrho_i = \text{const}$, und die ϱ_i genügen im Dreiecksfalle der Bedingung $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$, während im linearen Falle die LANGRAGEsche Gleichung $5^0 : E(\varrho) = 0$ erfüllt ist. Der Proportionalitätsfaktor (das Homothetieverhältnis) $R \equiv R(u)$ variiert nach den Gesetzen des Zweikörperproblems.

b) Es gilt also nach Korollar I:

$$\frac{d^2 R}{d u^2} \pm R = a \tag{35}$$

mit der charakteristischen Gleichung

$$k^2 \pm 1 = 0 \tag{36}$$

(nach der Substitution $R = e^{ku}$). Beide Wurzeln dieser Gleichung sind: $k_1 = k$, $k_2 = -k$ mit $k = \begin{cases} i \\ 1 \end{cases}$ (Vgl. die sog. »BOHLINsche Integration« in meiner zitierten Arbeit). W. z. b. w.

Korollar II: Die allgemeine Lösung des Zweikörperproblems ist eine periodische Funktion der Regularisierenden (Uniformisierenden) u und der Zeit t. (Neue Integration des Zweikörperproblems).

Beweis: a) Die Gleichung (13) wird hier nach Korollar I und Gleichung (35) einfach:

$$\frac{d^2 r}{d u^2} \pm r = a. \tag{35*}$$

Hier ist also

$$L(r) \equiv r'' \pm r, \quad f(u) \equiv a; \quad p(u) \equiv 1, \quad q(u) \equiv \pm 1 \ldots \quad h \lesseqgtr 0, \quad a \gtrless 0.$$

Die WRONSKIsche Determinante ist

$$W(u) = \begin{vmatrix} e^{ku} & e^{-ku} \\ ke^{ku} & -ke^{-ku} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{vmatrix} = -2k \neq 0$$

sobald $h \neq 0$, was wir auch in (35*) schon vorausgesetzt haben. Den parabolischen Fall werden wir also gesondert behandeln müssen.

b) Nun folgt durch elementare Rechnungen:

$$\gamma(u,\xi) = \pm \frac{1}{2k} \cdot \frac{e^{-k\xi}\, e^{ku} - e^{k\xi}\, e^{-ku}}{2} = \pm \frac{1}{2k}\, sh\, k(u-\xi) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2k}\, sh\, k(u-\xi) \ldots u \geq \xi \\[2ex] \dfrac{1}{2k}\, sh\, k(\xi - u) \ldots u \leq \xi\,. \end{cases}$$

Die GREENsche Funktion ist auch periodisch und symmetrisch:

$$G(u,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2k}\, e^{k(u-\xi)} \ldots u \geq \xi \\[2ex] \dfrac{1}{2k}\, e^{k(\xi-u)} \ldots u \leq \xi\,. \end{cases}$$

c) Mit $\gamma(u,\xi)$ und $G(u,\xi)$ leiten wir nach (28) (31) partikuläre und allgemeine Integrale her:

$$r_0(u) = \int_\alpha^\beta \gamma(u,\xi)\, f(\xi)\, d\xi\,, \quad r_*(u) = \int_0^\omega G(u,\xi) f(\xi)\, d\xi\,.$$

Wir bekommen:

$$r_0(u) = \pm a \left\{1 - ch\, k\left(u - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot ch\, k \cdot \frac{\beta-\alpha}{2}\right\}.$$

Hier ist $\varepsilon = 1$, dieses partikuläre Integral ist also eine *Stossbahn* (Ejektionstrajektorie). Ähnlich wird:

$$r_*(u) = \pm a \left\{1 - \frac{e^{k(\omega-u)} + e^{+ku}}{2}\right\}.$$

Hier gelten die Randbedingungen der Periodizität:

$$r_*(0) = r_*(\omega)\,, \quad \left(\frac{dr_*}{du}\right)_0 = \left(\frac{dr_*}{du}\right)_\omega. \tag{29*}$$

Das ergibt eindeutig:

$$k\omega = 2\pi i\,, \quad \omega = \begin{Bmatrix} 2\pi \\ 2\pi i \end{Bmatrix} h \lessgtr 0\,.$$

Auch hier ist das periodische partikuläre Integral eine *Stossbahn:* $r_*(0) = r_*(\omega) = 0$. Dieselbe Form ergibt $r_0(u)$ mit $\alpha = 0$, $\beta = \omega$. Daher:

$$r_*(u) = \pm a \left\{1 - ch\, k u\right\}.$$

d) Da aber beide Fundamentalintegrale $e^{\pm k u}$ dieselbe Periode wie $r_*(u)$ haben, *ist das allgemeine Integral periodisch.* Die Anfangsbedingungen zur Festlegung der c_1^*, c_2^* in (31) seien (wie bekannt): (Symmetrie) $c_1^* = c_2^*$, $r_*(0) = r_*(\omega) = r_0 = c_1^* + c_2^* = r_{min} = \pm a(1-\varepsilon)$, $\varepsilon \lessgtr 1$; daher: $c_1^* = c_2^* = \pm \frac{a}{2}(1-\varepsilon)$ und dadurch gibt (31):

$$r(u) = \pm a \{1 - \varepsilon \operatorname{ch} k u\}$$

oder explizite

$$\begin{array}{l} \textit{elliptischer Fall} \\ h < 0,\ \varepsilon < 1,\ a > 0 \end{array} : r = a(1 - \varepsilon \cos u);$$

$$\begin{array}{l} \textit{hyperbolischer Fall} \\ h > 0,\ \varepsilon > 1,\ a < 0 \end{array} : r = a(\varepsilon \operatorname{ch} u - 1)$$

wegen $\operatorname{ch} iu = \cos u$. W. z. b. w.

Korollar III: Die parabolische Bewegung im Zweikörperproblem mit $h = 0$ ist degeneriert periodisch mit unendlich grosser Periode.

Beweis: a) $h = 0$ ergibt
$$\frac{d^2 r}{d u^2} = p \tag{35**}$$
mit dem allgemeinen Integral $r(u) = \frac{p}{2} u^2 + c_1 u + c_2$.

b) Die Grundlösungen und die GREENsche Funktion gibt uns das Fundamentalsystem $r_1(u) \equiv u$, $r_2(u) = 1$ der homogenen Gleichung $r''(u) = 0$. Die WRONSKIsche Determinante ist $W(u) \equiv \begin{vmatrix} u & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, also wird

$$\gamma(u, \xi) = \pm \frac{1}{2}(u - \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(u-\xi) \ldots u \geq \xi \\ \frac{1}{2}(\xi - u) \ldots u \leq \xi \end{cases}; \quad G(u, \xi) = \begin{cases} u \ldots u \geqq \xi \\ \xi \ldots u \leqq \xi. \end{cases}$$

c) Jetzt werden die partikulären Integrale

$$r_0(u) = \frac{p}{2}\left\{\frac{(u-\alpha)^2}{2} + \frac{(\beta - u)^2}{2}\right\}; \quad r_*(u) = \frac{p}{2}\left\{\omega^2 + u^2\right\}.$$

Das allgemeine Integral nach (31) schreiben wir wegen $r(0) = r(\omega) \neq 0$, $r'(0) = r'(\omega) = 0$ (Extremum): $\frac{p}{2}\omega^2 + c_2^* = \frac{p}{2} \cdot 2\omega^2 + c_1^* \omega + c_2^*$; $(pu)_0 + c_1^* = (pu)_\omega + c_1^*$. Also ist c_2^* beliebig und folgt wie vordem aus $r_{min} = \frac{p}{2} = c_2$. Dagegen muss $c_1 = c_1^* = 0$ und $\omega = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$ sein. Das bekannte allgemeine Integral $r(u) = r_0(u) + c_1 u + c_2 = \frac{p}{2}(1 + u^2)$ nötigt uns zu $\omega = \infty$. W. z. b. w.

T h e o r e m VIII: Im allgemeinen Dreikörperproblem ist die Gleichung (13) vom »parabolischen« Typus:

$$L(J) \equiv \frac{d}{du}\left\{V(u)\frac{dJ}{du}\right\} = 2\left\{1 + \frac{2h}{V(u)}\right\} \equiv f(u) \tag{37}$$

mit dem Fundamentalsystem von Integralen

$$J_1(u) \equiv T(u), \quad J_2(u) \equiv 1. \tag{38}$$

Das partikuläre Integral, das die Lösung der Randwertaufgabe der Periodizität darstellt, unterscheidet sich formal von dem allgemeinen Integral der Gleichung (37) nur durch eine additive Konstante.

Beweis: a)

$$L(J) \equiv \frac{d}{du}\left(V\frac{dJ}{du}\right) = 0, \quad V\frac{dJ}{du} = c_1 = V(0)\left(\frac{dJ}{du}\right)_0,$$

$$\frac{dJ}{du} = \frac{c_1}{V(u)}, \quad J(u) = c_1 T(u) + c_2 \cdot 1.$$

WRONSKIsche Determinante:

$$W(u) \equiv \begin{vmatrix} T(u) & 1 \\ \frac{1}{V(u)} & 0 \end{vmatrix} = \frac{-1}{V(u)} \neq 0$$

ausserhalb der Zusammenstösse.

Die Zusammenstösse bei periodischen Bahnen müssen also gesondert diskutiert werden.

$$\text{b)} \qquad \gamma(u,\xi) = \pm\frac{1}{2}\left\{T(u) - T(\xi)\right\} V(\xi) \begin{cases} u \geq \xi \\ u \leq \xi \end{cases}$$

$$G(u,\xi) = \begin{cases} T(u) \ldots u \geq \xi \\ T(\xi) \ldots u \leq \xi \end{cases} \tag{39}$$

(vgl. Korollar III für die Parabel). Wenn wir noch die Zerlegung $\int\limits_0^\omega - \int\limits_0^u = \int\limits_u^\omega$ beachten, bekommen wir nach (31) (32) als Lösung der Randwertaufgabe der Periodizität

$$J_*(u) = J(u) + 2\left\{\int\limits_0^\omega T(\xi)\,d\xi + h\,T^2(\omega) - \frac{J(0)}{2}\right\} \equiv J(u) + C \tag{40}$$

wo $J(u)$ aus (20) zu nehmen ist, und die Nebenbedingung besteht, dass $J(0) = J(\omega) =$ Extrem ist, also

$$\left(\frac{dJ}{du}\right)_0 = 0 \tag{41}$$

gilt; das ist immer zu erreichen (geeignete Wahl von u_0, t_0). W. z. b. w.

L e m m a III: Das Verfahren der Konstruktion periodischer Lösungen der Gleichung (13) mittels der GREENschen Funktionen liefert die allgemeinsten periodischen Lösungen.

Beweis: a) Für die Gleichung

$$\Lambda(J) \equiv L(J) + \lambda J = f(u) \tag{42}$$

sind alle periodischen Lösungen gegeben als Lösungen der Integralgleichung

$$J(u) - \lambda \int_0^\omega G(u, \xi) J(\xi)\, d\xi = g(u), \quad g(u) \equiv \int_0^\omega G(u, \xi) f(\xi)\, d\xi, \tag{43}$$

Die Lösung dieser Integralgleichung ist nun durch die Resolvente (lösender Kern)

$$\Gamma(u, \xi; \lambda) \equiv G(u, \xi)_\Lambda \tag{44}$$

gegeben. Es gilt die Lösungsformel

$$J(u) - \lambda \int_0^\omega \Gamma(u, \xi; \lambda)\, g(\xi)\, d\xi = g(u). \tag{45}$$

b) Es ist aber in unserem Problem $\lambda \equiv 0$, also sind nach (43) (45) *alle* periodischen Lösungen der Randwertaufgabe (29) durch

$$J_*(u) = \int_0^\omega G(u, \xi) f(\xi)\, d\xi \tag{46}$$

gegeben (vgl. (31) im Satz VI).

c) Andererseits sind nach (40) die periodischen Lösungen $J_*(u)$ aus dem allgemeinen Integral (20) der Gleichung (13) gewonnen. Diese Methode gibt also wirklich alle überhaupt möglichen periodischen Lösungen. W. z. b. w.

Theorem IX: Die Randwertaufgabe der Periodizität im allgemeinen Dreikörperproblem führt auf die Stossbahn (singuläre Trajektorie oder Ejektionsbahn) als partikuläres Integral. Die allgemeinste periodische Lösung ist durch die Bedingung

$$\int_0^\omega T(\xi)\, d\xi = \left\{\frac{V(0)}{2}\left(\frac{dJ}{du}\right)_0 - h\, T(\omega)\right\} T(\omega) \tag{47}$$

charakterisiert. Diese Bedingung lässt sich durch geeignete Wahl der Zählung des Parameters u (oder der Zeit t) vom Momente des Minimums $J(0) = J(\omega) \geqq 0$ einfach schreiben:

$$\omega + 2h\, T(\omega) = 0 \tag{48}$$

oder äquivalent:

$$\int_0^\omega T(\xi)\, d\xi = -h\, T^2(\omega) = -\frac{\omega^2}{4h}. \tag{48*}$$

Beweis: a) Nach Satz VIII ist:

$$J_*(u) = 2\left\{h\, T^2(u) + u\, T(u) - \int_0^u T(\xi)\, d\xi\right\} + 2\left\{h\, T^2(\omega) + \int_0^\omega T(\xi)\, d\xi\right\}.$$

Die Randbedingungen der Periodizität

$$J_*(0) = J_*(\omega)\,, \quad \left(\frac{dJ_*}{du}\right)_0 = \left(\frac{dJ_*}{du}\right)_\omega \tag{29}$$

führen auf

$$J_*(u) - J_*(0) = 2\left\{h\,T^2(u) + u\,T(u) - \int_0^u T(\xi)\,d\xi\right\}. \tag{49}$$

Nun ist

$$\frac{dJ_*}{du} = 2\left\{2\,h\,T(u)\cdot\frac{1}{V(u)} + T(u) + \frac{u}{V(u)} - T(u)\right\} = 2\,\frac{2\,h\,T(u)+u}{V(u)}\,,$$

und damit lauten die Randbedingungen

$$J_*(0) = J_*(\omega) = 2\left\{2\,h\,T^2(\omega) + \omega\,T(\omega)\right\}, \quad 0 = \frac{2\,h\,T(\omega)+\omega}{V(\omega)}\,. \tag{50}$$

b) Um den Stossbahnen zu entgehen, müssen wir auf das allgemeine periodische Integral zurückgreifen. Denn (50) ergibt für das partikuläre periodische Integral (49) nur die Alternative

$$\begin{cases} 2\,h\,T(\omega) + \omega = 0\,. \\ \quad V(\omega) = 0\,. \end{cases}$$

Wegen der besonderen Form in (49) bedeutet aber die erste Möglichkeit: $J_*(0) = J_*(\omega) = 0$, also den ternären Zusammenstoss, während die zweite Möglichkeit daneben noch den binären Zusammenstoss ergibt mit $W(\omega) = 0$. Dass wir in (29) gerade das Minimum haben, ist entweder aus $J \geqq 0$ klar, oder folgt aus (13). Das Lemma II werden wir hier nebenbei aufs Neue gewinnen.

c) Das allgemeine Integral unterscheidet sich nach (40) von $J_*(u)$ sowieso nur in der Konstante (formal, denn die Struktur der Funktion $T(u)$ ist hier eine andere), und wir haben aus (29):

$$\left.\begin{aligned} (\omega) - J(0) = 2\left\{h\,T^2(\omega) + \omega\,T(\omega) - \int_0^\omega T(\xi)\,d\xi\right\} + V(0)\left(\frac{dJ}{du}\right)_0\cdot T(\omega) = 0 \\ \left(\frac{dJ}{du}\right)_\omega\cdot V(\omega) - \left(\frac{dJ}{du}\right)_0\cdot V(0) = 2\left\{2\,h\,T(\omega)+\omega\right\} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Unter verschiedenen Anfangsbedingungen werden diese beiden Relationen nur im Falle, dass (48) gilt, erfüllt werden können. Daraus folgt sofort (47). Wenn wir (48*) nach dem Parameter ω differenzieren, bekommen wir wieder (48). Zugleich folgt

$$V(0) = V(\omega)\,. \tag{51*}$$

Damit haben wir über das Theorem IV die periodischen Lösungen des Dreikörperproblems und der Gleichung (13) noch um einen Schritt näher gebracht. Zählen wir u (und t) so, dass $J(0) = J(\omega) = J_{min}$, so ist notwendig

$$\left(\frac{dJ}{du}\right)_0 = \left(\frac{dJ}{du}\right)_\omega = 0. \tag{51**}$$

Dann sind (47) und (48*) untereinander äquivalent.

d) Nebenbei haben wir gewonnen: wegen $u \geqq 0$, $\frac{1}{V(\xi)} \geqq 0$, $T(u) \equiv \int_0^u \frac{d\xi}{V(\xi)} \geqq 0$ muss auch $\int_0^\omega T(\xi)\, d\xi = -\frac{\omega^2}{4h} \geqq 0$ gelten, was sofort die Alternative ergibt: $\begin{cases} h < 0, \omega \text{ reell} \\ h > 0, \omega \text{ imaginär} \end{cases}$. Für reelle periodischen Lösungen gilt also Lemma II. W. z. b. w.

Korollar IV: Die Methode der Theoreme VIII+IX gibt im Zweikörperproblem wieder dieselben Ergebnisse wie in Korollar II.

Beweis: a) Wir nehmen das Fundamentalsystem von Integralen wie in den genannten Sätzen, nehmen aber rechts gleich

$$V(\xi) \equiv \frac{\mu}{a(1 - \varepsilon \cos \xi)}$$

(sonst lässt sich die nur formal angeschriebene »Lösung« (20) oder (40) u. s. w. nicht wirklich ausrechnen: in dieser Hinsicht ist die jetzige Methode keine neue Integration!). Dadurch wird

$$T(u) = \frac{a}{\mu}(u - \varepsilon \sin u), \qquad G(u, \xi) = \begin{cases} \frac{a}{\mu}(u - \varepsilon \sin u) \dots u \geqq \xi \\ \frac{a}{\mu}(\xi - \varepsilon \sin \xi) \dots u \leqq \xi \end{cases}$$

Hier haben wir noch den elliptischen Fall, also $h \equiv -\frac{\mu}{2a} < 0$.

b) Nun ergibt $2hT(\omega) = -\frac{\mu}{a} \cdot \frac{a}{\mu}(\omega - \varepsilon \sin \omega) = -\omega$ oder $\sin \omega = 0$ aus (48), während (48*) auf $\cos \omega = 1$ führt. Also eindeutig $\omega = 2k\pi$. Die anderen Formeln lassen sich leicht durch Ausführung der Integrationen verifizieren, insbesondere (40). Die Randbedingungen lauten hier: $\frac{a}{\mu}(1 - \varepsilon)^2 = \frac{a}{\mu}(1 - \varepsilon \cos \omega)^2$, $0 = \frac{2a\varepsilon}{\mu}(1 - \varepsilon \cos \omega) \cdot \sin \omega$. Für $h > 0$ verlaufen die Rechnungen vollkommen analog, wenn wir imaginäre Perioden zulassen. W. z. b. w.

3.

Theorem X: Die einzigen periodischen Lösungen des allgemeinen Dreikörperproblems sind die LAGRANGEschen exakten Lösungen *(Schlussatz).*

Beweis: a) Nach Satz VII sind die LAGRANGEschen Lösungen periodische Lösungen des Problems. Sobald wir also die periodischen Lösungen unserer Gleichung (13) auf den Fall von Satz VII

(34) beschränken, haben wir a fortiori die Identität der periodischen Lösungen des Dreikörperproblems und der Gleichung (13) bewiesen. Hier brauchen wir also nicht die zwei anderen LAGRANGEschen Gleichungen für das Körperdreieck, die sehr kompliziert gebaut sind.

b) Untersuchen wir nun, unter welchen Bedingungen in $(0, \omega)$ beständig die Entwicklung gilt:

$$J(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \left(\frac{1}{V}\right)^\nu. \tag{52}$$

Der Einfachheit halber setzen wir

$$V(u) \equiv \frac{1}{R(u)} \tag{53}$$

und untersuchen die Bedingungen für die Entwicklung

$$J(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu R^\nu. \tag{54}$$

c) Die Frage ist keineswegs trivial, denn erstens werden wir aus der Existenz von (54) bei den periodischen Lösungen sogleich die Behauptung des Satzes beweisen können, diese Eigenschaft kann somit nicht allgemein erfüllt sein. Ausserdem können wir leicht (im Gegensatz zu Satz III/2, IV/2) ein Gegenbeispiel konstruieren:

1⁰) $u = u_1$; $m_1 r_1' = m_2 r_2' = m_3 r_3' = 3$; $V_1 = M$, $R_1 = \frac{1}{M}$;

$$J_1 = 9 \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{m_i^3};$$

2⁰) $u = u_2$; $m_1 r_1'' = m_2 r_2'' = 4$; $m_3 r_3'' = 2$; $V_2 = M = V_1$,

$$R_2 = \frac{1}{M} = R_1; \quad J_2 = 16 \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{m_i^3} - \frac{12}{m_3^3} \neq J_1.$$

Also gehören zu gleichen Werten von $V = \frac{1}{R}$ verschiedene Werte von J (man beachte, dass in dem Beispiel die Dreiecksrelationen erfüllt sind). Die 6 Werte r_i', r_i'' können wir als gegeben ansehen, dann haben wir die »erste Randwertaufgabe«, die im allgemeinen lösbar sein wird. Daher existieren Trajektorien des Problems, bei denen die Entwicklung (54) nicht im $(0, \omega)$ möglich ist, denn sie ist eo ipso eindeutig.

d) Dagegen ist die erste Bedingung für die Existenz der Entwicklung (54), die Monotonie von $J = J(R)$, *immer* erfüllt. Wegen $J = J(u)$, $R = R(u)$ gilt

$$\frac{dJ}{dR} = \frac{dJ}{du} : \frac{dR}{du} > 0. \tag{55}$$

Nämlich: ausserhalb der Zusammenstösse sind $J > 0$, $R > 0$ positiv definite homogene Funktionen in r_1, r_2, r_3 vom Grade 2 bzw. 1. Sie erreichen ihre Extreme genau für $\{r_1\, r_2\, r_3\}$ = Extrem, also gleichzeitig $\frac{dJ}{du} = \frac{dR}{du} = 0$; nach dem EULERschen Satze über homogene Funktionen (vgl. f) ist: $\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial J}{\partial r_i} \cdot r_i = 2J > 0$, $\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial R}{\partial r_i} \cdot r_i = R > 0$; $\frac{\partial J}{\partial r_i} \mp 0$, $\frac{\partial R}{\partial r_i} \mp 0$; daher werden J, R im »Kubus« $r_i' \leqq r_i \leqq r_i''$ gleichzeitig $J' = J_{min}$, $R' = R_{min}$; $J'' = J_{max}$, $R'' = R_{max}$.

Ist weiter $J \geqq 0$ semidefinit, so bedeutet $J_{min} = 0$ den ternären Zusammenstoss; dabei ist gleichzeitig $\frac{1}{V} \equiv R = 0$. Ist umgekehrt $R \geqq 0$ semidefinit, aber nicht zugleich $J = 0$, so hat man den binären Zusammenstoss. Dann ist $\frac{dR}{du} = 0$, aber nach (23) wegen $\frac{1}{V} = 0$ zugleich $\frac{dJ}{du} = 0$. Also ist im Intervall (R_{min}, R_{max}) $J(R)$ jedenfalls monoton und da J und R zugleich wachsen oder fallen, gilt auch das Plus-Zeichen in (55) dauernd.

e) Die zweite Bedingung für die Existenz der Entwicklung (54) ist die Eindeutigkeit von $J(R)$, die nach b) nicht immer erfüllt ist. Für die periodischen Bahnen ist jedoch die *hinreichende* Bedingung erfüllt, dass die Zeit t eine *ungerade* Funktion der Regularisierenden (Uniformisierenden) u ist:

$$T(u) \equiv -T(-u). \tag{56}$$

Denn dann sind $J(u)$ als Integral von $T(u)$ und $V(u) = \frac{1}{R(u)}$ als Ableitung von $T(u)$ *gerade* Funktionen von u, also symmetrisch, wie man leicht nachrechnet. Daher nehmen $J(u)$ und $R(u)$ gleichzeitig dieselben Werte im Wachsen wie im Fallen an, und zwar symmetrisch in $u = 0$, also auch in $u = \omega$ u. s. w. Damit ist die verlangte Eindeutigkeit von $J(R)$ sichergestellt.

Die Bedingung (56) ist gerade für die periodischen Bahnen erfüllt. Denn:

$$\omega + 2h\,T(\omega) = 0 \tag{48}$$

und

$$-\omega + 2h\,T(-\omega) = 0 \tag{57}$$

bedeuten für die Funktion

$$\Psi(u) \equiv T(u) + T(-u) \tag{58}$$

dass $\Psi(k\omega) = 0$, $\left(\frac{d\Psi}{du}\right)_{k\omega} = \frac{1}{V(k\omega)} - \frac{1}{V(-k\omega)} = \frac{1}{V_0} - \frac{1}{V_0} = 0$. Die

Funktion $\Psi(u)$ ist aber als lineare Kombination von partikulären Integralen $T(u)$, $T(-u)$ der *homogenen* Gleichung $L(J)=0$ auch ein partikuläres Integral dieser Gleichung, und daher notwendig $\Psi(u) \equiv 0$; w. z. b. w.

Wir notieren noch die Beziehungen

$$T(K\omega \pm u) = K \cdot T(\omega) + T(\pm u); \quad \Phi(u) \equiv \int_0^u T(\xi)\, d\xi$$
$$\Phi(K\omega) = K \cdot \Phi(\omega) + \binom{K}{2} T(\omega) \cdot \omega \ldots \Phi(K\omega + u) = \Phi(K\omega) + KuT(\omega) + \Phi(u). \tag{59}$$

f) Aus der Existenz der Entwicklung (54) folgt sofort die Behauptung des Satzes. Denn aus (11) (12) (13) folgt: $\frac{1}{V(\varrho r_1, \varrho r_2, \varrho r_3)} = R(\varrho r_1, \varrho r_2, \varrho r_3) = \varrho \cdot R(r)$; $J(\varrho r_i) = \varrho^2 J(r)$ einerseits. Andererseits ist nach (54): $(J\varrho r_i) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu R^\nu (\varrho r_i) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varrho^\nu \cdot R^\nu = \varrho^2 J = \varrho^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu R^\nu$.
Das ist jedoch nur möglich für: $a_2 \neq 0$, $a_\nu = 0$ $(\nu \neq 2)$.

Es steht ausser Zweifel, dass für J, R die Eigenschaften der homogenen Funktionen ausgenützt werden können. Dennoch könnte jemand gegen den eben gegebenen Beweis einwenden, er setze die Existenz eines solchen Wertes $\bar{u}$ voraus, dass auf den Trajektorien neben $\{r_1\, r_2\, r_3\}$ auch $\{\varrho r_1, \varrho r_2, \varrho r_3\}$ liegen; und die Existenz eines solchen $\bar{u}$ müsste erst bewiesen werden. Jedenfalls müssen wir darauf aufmerksam machen, dass diese Voraussetzung noch keineswegs die Homothetie der Körperdreiecke während der Bewegung mit dem Homothetieverhältnis ϱ in sich einschliesst. Denn für die LAGRANGEschen Lösungen muss *dauernd* $\frac{r_i'}{r_i''} = \varrho$ sein, und nicht nur für zwei »Pseudomomente« u, $\bar{u}$. Es liegt also kein »circulus vitiosus« vor.

Wir geben dennoch noch einen Beweis, der von der Voraussetzung der Existenz eines solchen Faktors ϱ unabhängig ist. Wir leiten nämlich direkt (ohne Benutzung eben dieses Faktors ϱ) die EULERsche Formel für homogene Funktionen in unserem Falle her:

$$\frac{\partial J}{\partial r_i} = \frac{2 r_i}{m_i}, \quad \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial J}{\partial r_i} \cdot r_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{2 r_i^2}{m_i} = 2J;$$

$$\frac{\partial R}{\partial r_i} = \frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{1}{V}\right) = -\frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial r_i} = -R^2 \cdot \left(-\frac{M}{m_i r_i^2}\right),$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial R}{\partial r_i} r_i = R^2 \cdot \sum_{i=1}^{3} \frac{M}{m_i r_i} = R.$$

Nun ergibt (54):

$$\frac{\partial J}{\partial r_i} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu R^{\nu-1} \cdot \frac{\partial R}{\partial r},$$

$$2J = \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial J}{\partial r_i} \cdot r_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu R^{\nu-1} \cdot \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial R}{\partial r_i} \cdot r_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu R^\nu,$$

daher:

$$2 \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu R^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu R^\nu.$$

Es folgt: $2a_\nu = \nu a_\nu$ oder: $a_2 \neq 0$, $a_\nu = 0$, $(\nu \neq 2)$.

Daher gilt gerade für die periodischen Lösungen

$$J = a_2 \cdot R^2. \tag{60}$$

Zugleich hat sich herausgestellt, dass die Bedingung der Symmetrie für die Eindeutigkeit von $J = J(R)$ nicht nur hinreicht, sondern auch notwendig ist, denn sie hat periodische Bewegungen zur Folge. W. z. b. w.

Schlussbemerkung: Durch die vorangehenden Sätze ist das »POINCARÉsche Problem« im Dreikörperproblem, nämlich die Frage über die periodischen Lösungen dieses Problems, vollständig gelöst. An sich ist das Ergebnis (Satz X) sehr natürlich: da niemand nach LAGRANGE (1772) im allgemeinen Dreikörperproblem konkrete periodische Bahnen finden konnte; und da man auch im restringierten Dreikörperproblem zeigen kann, dass es ausserhalb des mitrotierenden Koordinatensystems, d. h. im Inertialsystem, keine weiteren (geschlossenen) periodischen Bahnen ausser den LAGRANGEschen gibt (vgl. meine Habilitationsschrift: R. VERNIĆ, *Die Bahnen des restringierten Dreikörperproblems, dargestellt im Inertialsystem;* Zagreb 1952, Abh. Südslav. Akademie d. Wiss. u. Künste, II. Abt., Nr. 4) — so ist das angegebene Ergebnis sehr plausibel. Es steht hingegen im schroffen Gegensatz zu der Meinung der meisten Mathematiker und Astronomen, die auf Grund der Resultate von POINCARÉ die Existenz ganzer Familien von periodischen Bahnen im Dreikörperproblem als bewiesen ansahen. Der Ausgangspunkt der Untersuchungen von POINCARÉ in seinem Fundamentalwerke »Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste« Tome I (1892) über die periodischen Bahnen (erster Gattung) ist das zweifach degenerierte Dreikörperproblem: eine endliche Masse $m_1 = 1$ und zwei infinitesimale Massen $m_2 \equiv a_2 \mu = 0$, $m_3 = a_3 \mu = 0$. Die Bewegung zerfällt in diesem Falle in zwei unabhängige KEPLERsche Bewegungen von m_2 und m_3 um m_1 nach

den Gesetzen des Zweikörperproblems. Die Bewegung ist somit dauernd periodisch (und reel für $h < 0$). Nehmen wir nun μ in m_2, m_3 verschieden von Null, aber genügend klein an, so geben die Entwicklungen der vorkommenden Grössen im entstandenen »kleinen Problem« die Existenz periodischer Bahnen auch für solche genügend kleine $\mu \neq 0$. Je nach den Eigenschaften der Ausgangsbewegung für $\mu = 0$ (ebene Kreisbewegung $\varepsilon = 0$, $i = 0$; ebene Ellipsenbewegung $\varepsilon \neq 0$, $i = 0$; räumliche Ellipsenbewegung $\varepsilon \neq 0$, $i \neq 0$) haben wir die periodischen Lösungen mit $\mu \neq 0$ erster, zweiter oder dritter Art. Dabei ist die gleiche Periode wie für $\mu = 0$ (also T) vorausgesetzt; dies sind die periodischen Lösungen erster Gattung. Für die periodischen Lösungen zweiter Gattung (Tome III, 1899) ist die Periode ein Vielfaches mT von T. Dass aber solche periodische Lösungen wirklich mit $\alpha_2 \neq 0$ *und* $\alpha_3 \neq 0$ auftreten, hat weder POINCARÉ noch jemand anderer bewiesen. Es ist die Existenz solcher periodischen Lösungen nur im Falle $\alpha_2 \neq 0, \alpha_3 = 0$ (Problème restreint) sichergestellt. Wegen $\mu < \delta$ hat POINCARÉ somit den Existenzbeweis für periodische Lösungen nicht einmal für das restringierte Dreikörperproblem beendet. Das erreichte erst die »Kopenhagener Schule« von Elis STRÖMGREN durch numerisches Experiment, indem sie ganze Familien von periodischen Bahnen für »grosse« μ fanden. Ausserdem kann man darauf hinweisen, dass der Beweis von POINCARÉ über die Nichtexistenz eindeutiger Integrale, der unmittelbar auf die Untersuchungen über periodische Bahnen im angeführten Werke folgt, auch als ungenügend und von geringerem Geltungsbereich als angegeben aufgezeigt worden ist. Daher scheinen mir die Ergebnisse dieser Arbeit in keinem Widerspruch mit dem zu stehen, was POINCARÉ wirklich bewiesen hat.

Die vorangehenden Resultate könnte man als typische »Sundmanians« ansprechen. Sie lösen vollständig eine wichtige Frage im Dreikörperproblem, bereichern aber andererseits nicht unser positives Wissen über die Eigenschaften allgemeiner Bahnen des Problems. Es muss jedoch hervorgehoben werden, dass durch die Originalergebnisse SUNDMANs aus 1907, 1909 bzw. 1912/1913, durch die »Sundmanians« in meinen Arbeiten (1950, 1951) und in dieser Arbeit auch folgende wesentliche Erkenntnis über die qualitativen Eigenschaften allgemeiner Bahnen des Dreikörperproblems gewonnen ist: im allgemeinen sind die Bahnen transzendente Kurven ohne besondere mathematischen oder physikalischen Eigenschaften, ausser vielleicht der Zusammenstösse. Es bliebe also noch, neben der »stabilité à la POISSON« (POINCARÉ, a. a. O. Tome III), die CHAZY viel untersuchte, die sehr spezielle »stabilité complète ou stabilité à la LAGRANGE« zu untersuchen, was mir jedoch erst im n-Körperproblem wichtig erscheint.

PERIODIČNA RJEŠENJA PROBLEMA TRIJU TIJELA*)

Radovan Vernić, Zagreb

Sadržaj

U prvom dijelu članka dolaze teoremi egzistencije za potpunu integrabilnost problema triju tijela, napose u slučaju periodičnih rješenja. U 1. teoremu izvodi se elementarno potpuna regularizacija odn. uniformizacija problema triju tijela transformacijom SUNDMANova tipa (1) spec. (2), koju je autor uveo 1951 u svojoj disertaciji. Zatim se u 2. teoremu s pomoću nje transformira LAGRANGEova formula na oblik (13) i s njom dalje isključivo operira. Ta jednadžba među svojim periodičnim rješenjima sadrži sva periodična rješenja problema triju tijela; izuzet je restringirani problem (3. i 4. teorem i lema 1.). Zatim se ponavlja od prije poznati nužni uvjet za periodična rješenja $h < 0$ u lemi 2. Konačno se 5. teoremom eksplicite, ali samo formalno, osnovna jednadžba (13) potpuno integrira do općeg integrala (20) uz oznaku (21). Svi izvodi provjeravaju se na problemu dvaju tijela u korolaru 1.

U drugom dijelu članka primjenjuje se na periodična rješenja jednadžbe (13) teorija GREENovih funkcija iz rubnih problema običnih diferencijalnih jednadžbi i uspostavlja veza s teorijom integralnih jednadžbi (teoremi 6, 8, lema 3). Rubni uvjet periodičnosti vodi na potpunu linearnu diferencijalnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima u slučaju LAGRANGEovih koničnih egzaktnih rješenja (7. teorem). U korolarima 2—3 izvodi se spomenutom teorijom GREEN-ovih funkcija nova integracija problema dvaju tijela, dok se u teoremu 8 za opći problem triju tijela dobiva parabolički tip jednadžbe (37) s periodičnim integralom (40), koji se od općeg razlikuje (formalno) samo za konstantu. Parametar u brojimo od ekstrema prema (41). S pomoću teorije integralnih jednadžbi dokazuje se, da su dobivena periodična rješenja najopćenitija i karakterizirana uvjetima (47) odn. uz pogodan izbor konstanti, s pomoću (48) ili (48*). Završava se verifikacijom na problemu dvaju tijela u korolaru 4.

U trećem dijelu članka dolazi samo glavni i završni teorem 10: *Jedina periodična rješenja općeg problema triju tijela su LAGRANGEova egzaktna konična rješenja.* Dokaz se izvodi u više koraka: a) čim pokažemo, da u općem slučaju za periodičnost opet vrijedi

---

* Prvi put saopćeno u kolokviju Društva matematičara i fizičara NR Hrvatske 1. IV. 1953. (Uporedi »Glasnik« Ser. II, T. 8. (1953), p. 154).

(34), onda je tvrdnja dokazana zbog teorema 7; b) zato istražujemo kada vrijedi razvoj (52) ili s pomoću (53) razvoj (54); c) protuprimjerom se pokazuje, da pitanje nije trivijalno; d) monotonost funkcije $J(R)$ je uvijek ispunjena (55); e) za jednoznačnost je *dovoljan* uvjet (56) simetričnosti, a to baš nastupa kod periodičnih rješenja; f) dakle se razvoj (54) reducira na (60) t. j. u biti na (34), što se na dva načina utvrđuje. Usput smo dobili, da je uvjet simetričnosti i nuždan. q. e. d. Na kraju se razmatra, zašto autor smatra, da nije u nesuglasnosti s onim, što je POINCARÉ 1892 doista dokazao.

(Primljeno 8. IV. 1953.)

PRILOG DARWINOVU IZVOĐENJU MAGNETIČKOGA MOMENTA ELEKTRONA I POZITRONA

Vladimir S. Vrkljan, Zagreb

Poznato je, da je Darwin[1]) pokazao, kako se u Diracovoj teoriji elektrona i pozitrona može izračunati magnetički momenat tih čestica primjenom specijalno napisanih matrica (općenito je to pokazao P. A. M. Dirac[2]). Ali je, koliko mi je poznato, Darwinova metoda pokazana primjenom takovih Diracovih matrica, kod kojih su samo četiri elementa različita od nule[3]).

Međutim se može postaviti pitanje, da li postoje Diracove matrice sa svih šesnaest elemenata različitih od nule i kako se u takvom slučaju primjenjuje Darwinova metoda. Da takove matrice doista postoje, može se pokazati na ovom primjeru[4]):

---

[1]) C. G. Darwin, Proceedings of the Royal Society (A), *118* (1928), 654—680. Vidi i A. Haas, Materiewellen und Quantenmechanik, 1930, str. 181, te nadalje: A. Haas, Theor. Phys. II (1930), str. 369.

[2]) P. A. M. Dirac, Zur Quantentheorie des Elektrons (Quantentheorie und Chemie), 1928, str. 92. — P. A. M. Dirac, Proceedings of the Royal Society (A) *117* (1928), 610—624.

[3]) Vidi radnje, navedene pod [1]).

[4]) Da matrice, navedene gore pod (1), nijesu jedine Diracove matrice sa šesnaest elemenata različitih od nule, može se lako pokazati; ovdje navodim samo kao primjer još i ove matrice:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & -i & -i & 1 \\ i & -1 & 1 & -i \\ i & 1 & -1 & -i \\ 1 & i & i & 1 \end{Vmatrix} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -1 & -i & i & 1 \\ i & 1 & 1 & i \\ -i & 1 & 1 & -i \\ 1 & -i & i & -1 \end{Vmatrix}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 1 & i & i \\ 1 & 1 & -i & -i \\ -i & i & -1 & 1 \\ -i & i & 1 & -1 \end{Vmatrix} \qquad \alpha_4 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -1 & 1 & -i & i \\ 1 & -1 & -i & i \\ i & i & 1 & 1 \\ -i & -i & 1 & 1 \end{Vmatrix} \tag{1a'}$$

Moglo bi se pomisliti, da se poznatom transformacijom $U \alpha_k U^{-1}$ povoljnih Diracovih matrica α_k ($k = 1, 2, 3, 4$) može lako doći do Diracovih matrica sa svim elementima različitima od nule. Međutim, stvar se sastoji u tome, da treba pogoditi takovu matricu U, koja će sve četiri Diracove matrice (inače povoljno uzete) prevesti u one sa šesnaest elemenata različitih od nule.

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & i & i & 1 \\ -i & -1 & 1 & i \\ -i & 1 & -1 & i \\ 1 & -i & -i & 1 \end{Vmatrix} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -1 & i & 1 & -i \\ -i & 1 & -i & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ i & 1 & i & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & -i & 1 & -i \\ i & -1 & -i & 1 \\ 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & -i & -1 \end{Vmatrix} \qquad \alpha_4 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -1 & -i & i & 1 \\ i & 1 & 1 & i \\ -i & 1 & 1 & -i \\ 1 & -i & i & -1 \end{Vmatrix} \tag{1}$$

Onda Diracove jednadžbe, napisane na osnovi tih matrica, glase

$$\begin{gathered}
P_1[\Psi_1 + \Psi_4 + i(\Psi_2 + \Psi_3)] + P_2[-\Psi_1 + \Psi_3 + i(\Psi_2 - \Psi_4)] + \\
+ P_3[\Psi_1 + \Psi_3 - i(\Psi_2 + \Psi_4)] + m_0 c[-\Psi_1 + \Psi_4 + i(-\Psi_2 + \Psi_3)] - 2P_4\Psi_1 = 0 \\
P_1[i(-\Psi_1 + \Psi_4) - \Psi_2 + \Psi_3] + P_2[-i(\Psi_1 + \Psi_3) + \Psi_2 + \Psi_4] + \\
+ P_3[i(\Psi_1 - \Psi_3) - \Psi_2 + \Psi_4] + m_0 c[i(\Psi_1 + \Psi_4) + \Psi_2 + \Psi_3] - 2P_4\Psi_2 = 0, \\
P_1[i(-\Psi_1 + \Psi_4) + \Psi_2 - \Psi_3] + P_2[\Psi_1 - \Psi_3 + i(\Psi_2 - \Psi_4)] + \\
+ P_3[\Psi_1 + \Psi_3 + i(\Psi_2 + \Psi_4)] + m_0 c[-i(\Psi_1 + \Psi_4) + \Psi_2 + \Psi_3] - 2P_4\Psi_3 = 0, \\
P_1[\Psi_1 + \Psi_4 - i(\Psi_2 + \Psi_3)] + P_2[i(\Psi_1 + \Psi_3) + \Psi_2 + \Psi_4] + \\
+ P_3[i(\Psi_1 - \Psi_3) + \Psi_2 - \Psi_4] + m_0 c[\Psi_1 - \Psi_4 + i(-\Psi_2 + \Psi_3)] - 2P_4\Psi_4 = 0.
\end{gathered} \tag{2}$$

Ako prvu od ovih jednadžbi »množimo« sa $P_1 - P_2 + P_3 - - m_0 c + P_4$, drugu sa $iP_1 + iP_2 - iP_3 - im_0 c$, treću sa $iP_1 + P_2 + + P_3 + im_0 c$ i konačno četvrtu sa $P_1 - iP_2 - iP_3 + m_0 c$, pa sve tako dobivene jednadžbe zbrojimo, dobivamo konačno

$$\begin{gathered}
(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + m_0^2 c^2 - P_4^2)\,\Psi_1 + \\
+ \frac{1}{2}(P_1 P_2 - P_2 P_1)[i(\Psi_1 + \Psi_2) + \Psi_3 + \Psi_4] + (P_2 P_3 - P_3 P_2)\, i\Psi_4 + \\
+ \frac{1}{2}(P_3 P_1 - P_1 P_3)[i(-\Psi_1 + \Psi_2) - \Psi_3 + \Psi_4] + \\
+ \frac{1}{2}(P_4 P_1 - P_1 P_4)[\Psi_1 + \Psi_4 + i(\Psi_2 + \Psi_3)] + \\
+ \frac{1}{2}(P_4 P_2 - P_2 P_4)[-\Psi_1 + \Psi_3 + i(\Psi_2 - \Psi_4)] + \\
+ \frac{1}{2}(P_4 P_3 - P_3 P_4)[\Psi_1 + \Psi_3 - i(\Psi_2 + \Psi_4)] = 0\,.
\end{gathered} \tag{3}$$

Slično bi se dobile »množenjem« s odgovarajućim faktorima i nakon zbrajanja ostale tri jednadžbe. Time je pokazano, kako se i u ovom slučaju, ako radimo s Diracovim matricama, kod kojih su svi elementi različiti od nule, može primijeniti Darwinova

metoda za izračunavanje magnetskog momenta elektrona (odn. pozitrona). Ali je svakako interesantno spomenuti, da se metoda valnog paketa, kako se čini, u ovom slučaju ne može upotrijebiti, a bit će tomu vjerojatno razlog, što matrice, s kojima radimo primjenjujući tu metodu, treba da su valjda posebno konstruirane[5]).

(Primljeno 5. V. 1953.)

BEITRAG ZUR DARWINSCHEN ABLEITUNG DES MAGNETISCHEN MOMENTS DES ELEKTRONS UND DES POSITRONS

Vladimir Vrkljan, Zagreb

Zusammenfassung

Der Verfasser stellt sich im Aufsatz die Frage auf, ob in der Diracschen Theorie die Matrizen bestehen, in welchen alle Elemente verschieden von Null sind. Es wird gezeigt, dass solche Matrizen in Wirklichkeit bestehen und sie werden unter (1) und (1a) angeführt.

Es wird dann weiter gezeigt, welche Operatoren an die mittels der Matrizen (1) aufgeschriebenen Diracschen Gleichungen anzuwenden sind, um das magnetische Moment des Elektrons bzw. des Positrons nach der Darwinschen Methode zu berechnen.

---

[5]) Glasnik matematičko-fizički i astronomski, (II) *6*, (1951), str. 49—56

REAL AND ORDINAL NUMBERS AS SETS OF RATIONAL NUMBERS[1)]

George Kurepa, Zagreb

It is an astonishing historical fact that transfinite ordinal numbers were discovered altogether so lately as in the last quarter of the 19 century (by G. C a n t o r). It is also a historical fact that so late as in the second half of 19 century the arithmetical definitions of real numbers were done (by W e i e r s t r a s s, D e d e k i n d and M é r a y - H e i n e - C a n t o r, respectively). In this Note we shall see how, starting from the set PR of all parts of the set R of rational numbers, we can simultaneously build the theory of ordinals as well as that of real numbers led by a simple logical idea concerning logical quantifiers.

By the passage from N to R one is aware of the following two phenomena:

1) Although the new set R has not the principal property of N to satisfy to minimum principle, it is to be well-ordered, there are several sets $\subseteq R$ each of which is well-ordered.

2) There are infinite subsets $X \subseteq R$ each of which has the following striking property: *almost all points of* X *are included in arbitrarily small intervals;* e. g. the set $\frac{1}{N}$ of all $\frac{1}{n}$ $(n \in N)$ is almost all contained in every neighborhood of 0. Now, it is a simple logical principle to consider the sets $w\,R$, C_1 of all such $X \subseteq R$ satisfying 1) and 2) respectively. And a simple organization of wR and C_1 will lead us to, what is meant, *ordinal numbers* and *real numbers* respectively. *E. g.* the main idea in the organization of wR consists in the principle of juxtaposition, by means of which starting from two (any) well-ordered sets one gets again a well-ordered set. So it turns out that ordinal numbers are much simpler than are real numbers. That real numbers appeared earlier than general ordinal numbers, the reason is the tremendous importance of real numbers in applications especially for various mensurations. In that connection it is interesting to observe how D e n j o y [1] built denumerable ordinals starting from real numbers.

---

1) The matter of the article is a part of a colloquium in Zagreb, February 1, 1950 (cf. this *Journal* 5, p. 42 1950 and K u r e p a [2]) and reproduced in the lecture *Sets and numbers* I did, November 30, 1950 in the *University of California* in Los Angeles.

Notations:

kX denotes the ordinal number of $X \cdot v$ is vacuous set. If X, Y are sets, $X+Y$ denotes the set of all sums $x+y$, $(x \in X, y \in Y)$. Analogously, one defines: the *direct difference* $X - Y$, *the direct product* XY and *the direct quotient* $\frac{X}{Y}$ respectively. $X \leq Y$ means $x \leq y$ $(x \in X,\ y \in Y)$. Let us observe that $X \setminus Y$ denotes the set of all the points of X no of which belongs to Y. CX denotes the *complementary* set of X (relatively to a given set, that can vary from case to case). If ϱ is a notation for a binary relation or equality, then ϱ_1, ϱ_2 denote the first and second part of ϱ respectively. For instance $(6.1)_1$ denotes the first part of (6.1) i. e. the set $\left(I+\frac{1}{n}\right) \cap CI$ (s. later § 6).

Sometimes, *we shall write in two columns, left one* and *right one dealing with real numbers and ordinal numbers respectively.*

A statement concerning real (resp. ordinal) numbers is indexed with r (resp. with ω) if the corresponding assertion for ordinal (resp. real) numbers is indexed with ω (resp. r).

The aim of this note is to define simultaneously the real continuum C_1 and the set $I(\omega_1)$ (of all ordinal numbers each of which is 0, finite or denumerable) respectively as certain subsets of R corresponding to two (above referred to) phenomena in the set R of rational numbers.

The set

(0.1) $$N = 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots$$

of natural numbers is a part of the set

(0.2) $$R = r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \ (n \in N)$$
$$r_n \neq r_{n'}, \quad \text{if} \quad n \neq n'$$

of all rational numbers: $N \subseteq R$. For each $n \in N$, the initial interval

(0.3) $$I(n) \quad \text{or} \quad I(n; N)$$

consisting of $x \in N$ satisfying $x < n$ is vacuous (v) or finite, so that almost all natural numbers succeed to n. This property is the main property of the principle of complete induction. The same property implies that the set $\frac{1}{N}$ of $\frac{1}{n}$ $(n \in N)$ is almost completely included in every neighborhood of 0. That is to say: *in the set* R *there is an infinite set, say* $\frac{1}{N}$, *contained almost completely in arbitrarily small intervals.* Thus, in the set R we are dealing with the two phenomena 1) and 2) referred to previously. The phenomenon 2) suggests us to put the following.

D e f i n i t i o n: *if a set* $X \subseteq R$ *be such that for each* $n \in N$ *there is an interval* I *of* R *satisfying*

(0.4) $$k(X \cap I) > k(X \cap CI),$$

(0.5) $$(\text{diameter of } I) \quad dI < \frac{1}{n},$$

we shall say that the asymptotic diameter of X *is vanishing and write*

(0.6) $$d_a X = 0.$$

Now it is a natural question as that to consider, in the set PR of all $X \subseteq R$ the set

(0.7) C_1 or C	(0.7) wR or $I(\omega_1)$
of all the subsets $X \subseteq R$ each of which	
is infinite and satisfies $d_a X = 0$.	is well-ordered.

A simple organization of the set (0.7) will convince us that it is identical with the set of all

real numbers.	ordinal numbers of the second Cantor class.
Lemma 0.1 *If* X $\in$ C_1, *then the increasing sequence* $x_1, x_2, \ldots$ *of naturals is uniquely determined so that* $r_{x_1}, r_{x_2}, \ldots$ *are the points of* X *so as they are occurring in the ordering (0.2) of* R.	Lemma 0.1 *For every* X $\in$ wR *there is a subset* X_1 *in every interval of* R *so that* X *and* X_1 *are similar.*
Lemma 0.2. For any $r \in R,\ r - \frac{1}{N} \in C_1.$	Lemma 0.2. *For any* $n \in N,\ I(n, N) \in wR.$

1. *Order in the set (0.7)*

If $x, y \in (0.7)$, we shall define that[1.1)]

$rx < ry$ or $ry \geq rx$	$\omega x \leq \omega y$ or $\omega y \geq \omega x$
if and only if	
for every interval I of R containing almost all points of x there is but finite many points of y left from I.	the well-ordered subset $x \subseteq R$ is similar with an initial interval of the well-ordered set y.

One sees that the set (0.7) is totally ordered by the relation $\leq$. We shall write:

[1.1)] ω is the initial of *order;* r is the initial of *real* (number).

$$r x = r y$$

if and only if $rx \leq ry$ as well as $ry \leq rx$.

$$\omega x = \omega y$$

if and only if

$$\omega x \leq \omega y, \quad \omega y \leq \omega x.$$

Theorem 1.1. *In order that* rx = ry *it is necessary and sufficient that* $x \cup y \in (0.7)$. *In order that* rx < ry *it is necessary and sufficient that there are intervals* I_x, I_y *so that*

$$k(x \setminus I_x) < \aleph_0$$
$$k(y \setminus I_y) < \aleph_0$$
$$I_x < I_y.$$

Theorem 1.1. *In order that*

$$\omega x < \omega y,$$

it is necessary and sufficient that the set x *be similar with a proper initial interval of* y. *For any* $n \in N$, $I(n) \in wR$. *If* $n < n'$, *then*

$$\omega I(n) < \omega I(n').$$

Also $N \in wR$.

2. *Summation in (0.7). The sum, denoted,*

(2.1) $$r X + r Y$$

of numbers $X, Y \in (0.7)$ *is the set* $[x + \varphi(x)]$ *of all sums* $x + \varphi(x)$ $(x \in X)$, φ *being any one-to-one mapping of* X *onto* Y.

(2.1) $$\omega X + \omega Y$$

union $X_0 \cup Y_0$ *where* $X_0, Y_0 \in wR$, $X_0 < Y_0$ *and* $\omega X_0 = \omega X$, $\omega Y_0 = \omega Y$.

The existence and consistence of (2.1) is to be proved.

At first, the existence of such a mapping φ is obvious: it suffices to put

$$\varphi(r_{x_n}) = r_{y_n}$$

(cf. Lemma 0.1). It remains to prove that for any two such mappings φ, φ_1 the equality $r[x + \varphi(x)] = r[x + \varphi_1(x)]$ holds and that, consequently, the definition of sum is consistent. According to T. 1.1, one does prove that

$$[x + \varphi(x)] \cup [x + \varphi_1(x)] \in C_1.$$

Now, let $\varepsilon > 0$; let I_x, I_y be two intervals each of length $< \frac{\varepsilon}{2}$ and such that sets $I_x \setminus X$, $I_y \setminus Y$ are $< \aleph_0$; then the interval

$$I = I_x + I_y$$

has the length ε and contains all but finitely many points

$$x + \varphi(x), \quad x + \varphi_1(x) \quad (x \in X)$$

and that proves (2.2).

In virtue of L. 0.1 we can suppose that X_0 is in any interval I_x and Y_0 in any interval $I_y > I_x$. To prove the independence of (2.1) from the special choice of X_0, Y_0, let X', Y' be also so that $X' < Y'$,

$$\omega X = \omega X', \quad \omega Y = \omega Y';$$

then it is to be shown that

$$\omega(X_0 \cup Y_0) = \omega(X' \cup Y').$$

Now, if φ, φ' is the similarity of X onto X_0 and X' respectively; and ψ, ψ' the similarity of Y onto Y_0 and Y' respectively, it is obvious that $\varphi' \varphi^{-1}$ is a similarity of X_0 onto X', and that $\psi' \psi^{-1}$ is a mapping by similarity of Y_0 onto Y'. The mapping f of $X_0 \cup Y_0$ that is equal to $\varphi' \varphi^{-1}$ and $\psi' \psi^{-1}$ in X_0 and Y_0 respectively maps by similarity $X_0 \cup Y_0$ onto $X' \cup Y'$.

3. *Multiplication.* The product

(3.1) $rX \cdot rY$

of real numbers X, Y is defined as the set

$$[x\,\varphi(x)]$$

of all rational numbers

$$x\,\varphi(x) \quad (x \in X)$$

φ being any one-to-one mapping of X onto Y.

The existence and consistence of the real number $rX \cdot rY$ is to be proved analogously as in the case of the sum.

(3.1) $\omega X \cdot \omega Y$

of ordinal numbers X, Y is any element of wR that is similar with the set $X \times Y$ ordered by the principle of last differences: if

$$(x_i, y_i) \in X \times Y \quad (i = 1, 2)$$

then

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$$

means either $y_1 < y_2$ or $y_1 = y_2$; $x_1 \leq x_2$.

At first, one sees that $X \times Y$ so ordered is well-ordered; since $k(X \times Y) \leq \aleph_0$, $X \times Y$ is similar with a subset of R, thence the existence and consistence of (3.1).

4. As a simple exercise one proves the:

Theorem 4.1. *The set* C_1 *is relatively to the summation and the multiplication a commutative ordered field, say*

$$(C_1;\ +;\ \cdot);$$

$\frac{1}{N}$ *is the neutral additive element;* $1 + \frac{1}{N}$ *is the unity in this field. For any* $X \in C_1$ *one has*

$$rX + r(-X) = \frac{1}{N};$$

moreover if 0 *non* $\in X$, *then*

$$r\frac{1}{X} \cdot rX = 1 + \frac{1}{N}.$$

The set of all

$$x + \frac{1}{N} \quad (x \in R)$$

is a subfield of $(C_1;\ +;\cdot)$ *and the mapping* $e(x) = x + \frac{1}{N}$ *of* R *into* C_1 *is an isomorphism. Consequently, by putting*

(4.1) $$r\left(x + \frac{1}{N}\right) = r \quad (x \in R)$$

every rational number x becomes real and one has the embedding $R \subseteq C_1$.

Theorem 4.1. *The set* wR *is an additive and multiplicative semigroup, in which the right distributive law holds*

$$\omega A(\omega B + \omega C) = \omega A \cdot \omega B + \omega A \cdot \omega C.$$

The system of sets

$$\{0, 1, \ldots, n-1\} \in wR, \quad (n \in N)$$

has the same properties relatively to order, addition and multiplication as the set of non negative integers as it is seen from the mapping

$$e(n) = \{0, 1, \ldots, n-1\}, \quad (n \in N);$$

consequently, by putting

$$\omega v = 0, \quad \omega\{0, 1, \ldots, n-1\} = n$$

(4.1) $(n \in N)$

the non negative integers become ordinal numbers.

The set N considered as ordinal number is denoted ω_0. Thus, $\omega N = \omega_0$, $\omega_0 \in I(\omega_1)$ and $I(\omega_0) = \{0\} \cup N$.

Lemma 4.1. *If* $x \in C_1$ *then* $x \pm 1 \in C_1$, $x - 1 < x < x + 1$. *There is neither a first nor a last point in* C_1.

Lemma 4.1. *If* $x \in I(\omega_1)$ *then* $x+1 \in I(\omega_1)$ *and* $x < x + 1$; *the difference* $x - 1$ *does not exist necessarily. There is no last point in* $I(\omega_1)$; 0 *is the initial point in* $I(\omega_1)$.

5. *Definition of real numbers and of ordinal numbers respectively.*

The elements of the set

C_1 or C of $(0,7)$ | wR or $I(\omega_1)$ of $(0,7)$

will be said

real numbers | ordinal numbers

provided that the organization i. e. ordering, summation and multiplication of the set be done as in §§ 1, 2 and 3. Moreover the embedding (connection)

of R into the set C_1 | of non negative integers into the set wR

is effectuated by the mapping (4.1).

To avoid every ambiguity, any subset $X \subseteq R$ such that $X \in (0.7)$, if considered as

real number may be denoted also by rX. | ordinal number may be denoted also ωX.

6. *Some properties of sets* $C_1, I(\omega_1)$.

Lemma 6.1. *The ordered set* C_1 *is dense.*

At first, let x, y be 2 distincts real numbers; that means that there are two disjoint intervals I_x, I_y such that the sets $x \setminus I_x$, $y \setminus I_y$ be finite. Let I be an interval $\subseteq R$ between I_x, I_y; then every $z \in I$ is between x and y. Thus C_1 is dense; since $z \in R$, this proves also that R is everywhere dense in C_1.

Lemma 6.2. *There is a denumerable subset of* C_1, *which is everywhere dense in* C_1; *in particular* $\overline{R} = C_1$.

This is a consequence of the proof of L. 6.1, since z is between x and y.

Lemma 6.1. The ordered set $I(\omega_1)$ is totally well-ordered; every non void subset $S \subseteq wR$ has a unique initial element; in particular, 0 is the initial element of $I(\omega_1)$.

The initial element of all followers of any $x \in I(\omega_1)$ is $x+1$ (in general $\neq 1 + x$).

Let us prove that S has an initial number. Of course, we can suppose 0 *non* $\in S$; now let $s \in S$; s is a well-ordered subset of rational numbers and every ordinal $\alpha < s$ is equal to a unique initial interval I_α of s. Since the system of all such I_α's is well ordered, the same property holds for that subset of I_α's — and thus for the α's also — that are associated to all $\alpha < s$ such that $\alpha \in S$.

Lemma 6.2. ω. *There is no denumerable subset of* $\mathrm{I}(\omega_1)$ *which would be everywhere dense in* $\mathrm{I}(\omega_1)$. *In particular, for any non void* $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{I}(\omega_1)$ *such that* $\mathrm{k\,S} \leq \aleph_0$ *one has sup* $\mathrm{S} \in \mathrm{I}(\omega_1)$, *and thus sup* $\mathrm{S} + 1$ non $\in \overline{\mathrm{S}}, \overline{\mathrm{S}}$ *being the closure of* S.

S being a denumerable system of well-ordered subsets $\subseteq R$, let S_n $(n \in N)$ be the sequence of all $s \in S$; let S'_n be a set similar with S_n and located in

$$(a_n, a_n + \frac{1}{(n+1)^2}),$$

where

$$a_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{(\nu+1)^2}.$$

Of course $\alpha = \bigcup_n S_n' \in I(\omega_1)$ and $S_n < \alpha$ $(n \in N)$; thus sup $S \leq \alpha$; hence sup $S \in I(\omega_1)$. In particular, between $\alpha + 1$ and $\alpha + 3$ there is no element of S, what means that S is not everywhere dense.

Theorem 6.1. *The ordered set (0.7) has no gaps.*

Let I be a proper initial section of (0.7); let I have no terminal point; to prove that its complement CI has an initial point X. In the case of the set $I(\omega_1)$, the existence of X is obvious, the set $I(\omega_1)$ being well-ordered (of L. 6.1) and since $CI \neq v$.

In the case of C_1, let X be defined as the subset

$$r_{x_0}, r_{x_1}, \ldots$$

of (0.2) in the following manner: let $r_{x_0} = r_1$; let r_{x_1} be the first integer > 0 so that $r_{x_1} > r_{x_0}$; for each $n \in N$, let x_n be the first integer $> x_{n-1}$ so that $r_{x_n} > r_{x_{n-1}}$. Of course, the set X is uniquely determined and we shall prove that it is the initial element of CI.

There is no point $\mathrm{a} \in \mathrm{I}$ *such that* $\mathrm{X} < \mathrm{a}$.

In opposite case, R being everywhere dense, there would be $a\, r \in R \cap I$ so that $a < r$ thus $X < r$; let $r = r_m$; then the point r_m would be taken in consideration at least for the construction of the point r_{x_m} contrarily to $X < r_m$.

Let us prove that $X \in C_1$.

At first, we shall prove the following interesting

Lemma 6.3. *For every* $\mathrm{x} > 0$ *and every proper initial section* I *of* C_1 *(or of* R) *one has*[6.1)]

$$(I + x) \cap CI \supset v.$$

Let n be the minimal integer such that $\frac{1}{n} \leq x$; it is sufficient to prove that

$$\left(I + \frac{1}{n}\right) \cap CI \neq v. \tag{6.1}$$

[6.1)] The lemma 6. 3. ω does not hold; example $I = I(\omega_0)$ $x = 1$, since $I(\omega_0) + 1 = I(\omega_0)$; we remember that $t\,N = \omega_0$. *The L. 6. 3 is closely connected with, and represents a form of, the axiom of Archimedes.*

Either $\frac{1}{n} \in I$ or $\frac{1}{n} \in CI$.

First case: $\frac{1}{n} \in I$. Note p the integer satisfying

$$\frac{p}{n} \in I. \quad \frac{p+1}{n} \in CI;$$

but $\frac{p}{n} + \frac{1}{n} \in I + \frac{1}{n}$ and thus $\frac{p+1}{n} \in (6 \cdot 1)_1$.

Second case: $\frac{1}{n} \in CI$. If $0 \in I$; then $0 + \frac{1}{n} \in (6.1)_1$.

It remains the case $0 \in CI$. If $-\frac{1}{n} \in I$, then

$$-\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \in (6 \cdot 1)_1.$$

If $-\frac{1}{n} \in I$, let $q \in N$ satisfy

$$-\frac{q+1}{n} \in I, \quad -\frac{q}{n} \in CI;$$

thus

$$-\frac{q+1}{n} + \frac{1}{n} \in (6 \cdot 1)_1,$$

That proves the lemma 6.3. To prove $X \in C_1$, let $z_n \in (6.1)_1$; thus $z_n - \frac{1}{n} \in I$ and almost all points of X are located in the interval $(z_n - \frac{1}{n}, z_n)$ whose length is $\frac{1}{n}$; that means that $d_a X = 0$, thus $X \in C_1$ thence $X \in CI$ and it is obvious that no point of CI precedes X.

7. *The cardinal* $2^{\aleph_0}$ *of* C *and the cardinal* $\aleph_1$ *of* $\mathrm{I}(\omega_1)$.

T h e o r e m 7.1. r. *There is no knowledge about the set of cardinals* $> \aleph_0$ *and* $< kC_1 = 2^{\aleph_0}$. *According to Cantor hypothesis* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *there is no cardinal located between* $\aleph_0$ *and* $2^{\aleph_0}$ (cf. K u r e p a [3]).

T h e o r e m 7.1. ω. *The cardinal* $\aleph_1$ *of* $\mathrm{I}(\omega_1)$ *is an immediate successor of* $\aleph_0$; *for each cardinal* $\mathrm{m} < \aleph_1$, *necessarily* $\mathrm{m} \leq \aleph_0$.

That $\aleph_0 < \aleph_1$, this is obvious from lemma 6.2. Now, let $m \leq \leq \aleph_1$; that means that there is a set and even an initial interval I of $I(\omega_1)$ so that $m = kI$. Of course $I \subset I(\omega_1)$ since $kI < \aleph_1$.

Let $X \in I(\omega_1) \setminus I$; X is a well-ordered set of rational numbers and I is similar with an initial section I_x of I; thus $kI = = kI_x \leq kX \leq \aleph_0$ thence the requested relation $m \leq \aleph_0$.

References:

Dedekind R.: Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig, 1872 (Gesammelte math. Werke 3, 1932, 315—334).

Denjoy A.: L' énumération transfinie, Livre I, La notion de rang, Paris 1946, Livre II, L' Arithmétisation du transfini, Paris 1952.

Heine E.: Die Elemente der Funktionenlehre, J. für reine und angew. Mathematik 74, 172—188 (1872).

Kossak E.: Elemente der Arithmetik, Berlin 1872.

Kurepa Đ.: 1. Teorija skupova, Zagreb 1951,
2. Rational numbers as ordered triplets of natural integers, Glasnik Mat.-Fizički, T. 7., 133—139 (1952),
3. Sur un principe de la théorie des espaces abstraits, Comptes rendus Acad. Paris, 256; 655—657 (1953).

Méray Ch.: Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques, I Principes généraux, Paris 1894.

REALNI I REDNI BROJEVI DEFINIRANI KAO SKUPOVI RACIONALNIH BROJEVA

Đuro Kurepa, Zagreb

Sadržaj

Izgleda čudnovato, da su beskonačni redni brojevi uvedeni (G. Cantor) istom u posljednjoj četvrti prošlog stoljeća. I aritmetičke teorije realnih brojeva datiraju iz druge polovine prošlog vijeka (Weierstrass, Méray, Heine, Cantor). Međutim, uočilo se ovo: s jedne strane u skupu R racionalnih brojeva, ma da on sam nije posve dobro uređen kao što je to skup N i na čemu se osniva princip totalne indukcije, ipak R *posjeduje mnoštvo dobro uređenih dijelova;* sa druge strane pojavljuje se osebujna okolnost da R *sadrži beskonačnih dijelova* (na pr. skup $\frac{1}{N}$ svih razlomaka $\frac{1}{n}$) *sa svojstvom da im je glavnina sadržana u proizvoljno kratkim intervalima.* Onda je to jednostavna logička operacija — međuigra logičkih kvantifikatora — da se *promatra skup* wR *odn. skup* C_1 *svih takovih* $X \subseteq R$ *koji imaju prvo ili drugo opisano svojstvo. A onda, jednostavno organiziranje tih dvaju skupova (tako da se izjednačivanje, uređenje, sabiranje i množenje te veza sa* N *odn.* R *vrši po propisima iz §§ 1, 2, 3) dovodi nas do saznanja, da na taj način,* p a r a l e l n o, *dolazimo od skupa* R: *i na linearni kontinuum* C_1 *i na skup* I (ω_1) *svih Cantorovih brojeva*

od kojih je svaki: 0, konačan ili prebrojiv te time na uobičajeni niz 0, 1, 2,... rednih brojeva nadovezujemo beskonačne redne Cantorove brojeve, od kojih je najmanji ω, a dalje se, bez kraja i konca, nadovezuju:

$$\omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + \omega = \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \ldots, \omega \cdot n, \ldots, \omega^2 \ldots, \omega^\omega, \ldots$$

Time se dolazi do *komparativna izučavanja linearnog kontinuuma* C_1 *i skupa* $I(\omega_1)$ *svih rednih brojeva od kojih je svaki 0, konačan ili prebrojiv.*

Teorija takvih *Cantorovih rednih brojeva logički* je jednostavnija od teorije realnih brojeva; tako na pr. stepen beskonačnosti $\aleph_1$ svih tako uređenih različitih rednih brojeva je neposredno veći od $\aleph_0$ — t. j. od stepena beskonačnosti ili kardinalnog broja skupa *N* prirodnih brojeva. Kako se u tom pogledu vlada kardinalan broj $2^{\aleph_0}$ kontinuuma C_1, to je još velika naučna zagonetka (isp. Kurepa [3]).

Napominjemo da je Denjoy [1] dao jednu definiciju rednih brojeva polazeći od realnih brojeva.

U knjizi *Teorija skupova* prikazao je Kurepa (1) ne samo za prebrojive nego i za druge redne brojeve kako njihovu ulogu mogu preuzeti dobro uređeni skupovi.

(Primljeno 13. V. 1953)

ÜBER DIE UNABHÄNGIGKEIT *mod (G)* DER GANZZAHLIGEN LINEARFORMEN

Sibe Mardešić, Zagreb

1. — Es sei (x_k) eine beliebige Menge von Elementen x_k.[1]) Im Folgenden betrachten wir die Gruppe aller endlichen Linearformen

(1) $$\sum_k g_k x_k ,$$

wobei die Koeffizienten g_k aus einer beliebigen Abelschen Gruppe G genommen sind. Genauer gesagt: wir betrachten diejenigen Abbildungen f der Menge (x_k), mit Werten aus G, für welche $f(x_k) = 0$ für alle $x_k \in (x_k)$, ausgenommen endlich viele x_k, für die der Wert $f(x_k) \neq 0$ werden kann. (Zwei Abbildungen sind gleich dann und nur dann, wenn sie in allen Elementen von (x_k) übereinstimmen.)

Die naheliegende Definition der Summe zweier solcher Funktionen

(2) $$(f_1 + f_2)\, x_k = f_1 x_k + f_2 x_k ,$$

macht aus dieser Menge eine Abelsche Gruppe, die wir mit $G(x_k)$ bezeichnen.[2])

Wir führen folgende übliche und bequeme Bezeichnungen ein: $g_k x_k$ bezeichnet diejenige Funktion, die überall Null ist, ausser in x_k, wo sie den Wert g_k annimt. Wegen (2) kann jede Funktion aus $G(x_k)$ in der Form (1) dargestellt werden. Die Summe bezieht sich dabei, wie stets im Folgenden, auf endlichviele Summanden. Alle x_k, die in (1) vorkommen, sind voneinander verschieden.

Aus

$$\sum_k g_k x_k = 0 ,$$

wo 0 das Nullelement der Gruppe $G(x_k)$ ist, folgt offenbar $g_k = 0$, so dass die Darstellung (1) eindeutig ist.

---

[1]) Wir werden durch (a) diejenige Menge bezeichnen, deren allgemeines Element a ist. Hingegen bedeutet $\{a_1, \ldots, a_n\}$ die Menge der n Elemente $a_1, \ldots, a_n$.

[2]) Derartigen Beziehungen begegnen wir in der algebraischen Topologie, wo x_k die Elemente eines Komplexes sind, und $G(x_k)$ die Menge aller endlichen Ketten mit Koeffizienten aus G bedeutet. (Siehe P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie, Berlin 1935, S. 168—169.)

Durch die Tatsache, dass das Produkt mg einer ganzen Zahl m und eines beliebigen Elementes $g \in G$ definiert ist, wird die Gruppe $D(x_k)$, wo D die Gruppe der ganzen Zahlen ist, eine besondere Rolle spielen. Es ist nämlich möglich, auf natürliche Weise, eine Multiplikation zwischen G und $D(x_k)$, mit Werten aus $G(x_k)$, einzuführen.

Es sei das Produkt $g \cdot 1 x_k$ einfach die Funktion $g\, x_k$, und das Produkt

(3)
$$g \cdot X = g \cdot (\sum_k a_k x_k) = \sum_k (a_k g)\, x_k ,$$
$$g \in G,\ a_k \in D,\ X \in D(x_k).$$

Wir sind jetzt in der Lage, den Begriff der linearen Unabhängigkeit eines Systems $(X_i) \subseteq D(x_k)$, in Bezug auf eine Abelsche Gruppe G zu definieren, was wir kurz »*Unabhängigkeit mod* G« bezeichnen werden.

Definition 1. Ein System $(\mathrm{X_i}) \subseteq \mathrm{D}(\mathrm{x_k})$ *ist unabhängig mod* G, *wenn jede endliche Teilmenge von* $(\mathrm{X_i})$ *unabhängig mod* G *ist. Ein endliches System* $\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n\} \subseteq \mathrm{D}(\mathrm{x_k})$ *ist unabhängig mod* G, *wenn* $\mathrm{g_i} = 0,\ \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}$, *eine notwendige Bedingung für das Bestehen der Relation*

(4)
$$\sum_{i=1}^{n} g_i X_i = 0, \quad g_i \in G \quad \textit{ist.}$$[3]

Wir können diese Definition verallgemeinern, indem wir den Begriff der Unabhängigkeit in Bezug auf eine Menge von Gruppen (G) einführen, was wir als »*Unabhängigkeit mod* (G)« bezeichnen.

Definition 2. Ein System $(\mathrm{X_i}) \subseteq \mathrm{D}(\mathrm{x_k})$ *ist unabhängig mod* (G), *wenn es unabhängig mod* G *für jedes* G $\in$ (G) *ist.*

Ein besonders wichtiger Fall ist vorhanden, wenn (G) die Klasse aller Abelschen Gruppen bedeutet. In diesem Falle sprechen wir von »*universaler Unabhängigkeit*«. Dabei benutzen wir den Begriff der Klasse aller Abelschen Gruppen lediglich um der Definition der Unabhängigkeit, in Bezug auf jede vorgegebene Gruppe, eine bequemere Form zu geben.

Das System (x_k) und jede seiner Teilmengen sind Beispiele von universal unabhängigen Systemen.

Den entgegengesetzten Fall, die leere Menge von Gruppen, schliessen wir aus unseren Betrachtungen aus. Ebenso schliessen wir aus, weil unwichtig, Mengen (G) die aus lauter Nullgruppen bestehen. Jede Teilmenge von $D(x_k)$ ist gegenüber einer solchen Menge unabhängig.

Bezeichnen wir mit $N(G)$ die Menge aller Systeme $(X_i) \subseteq D(x_k)$, die unabhängig mod (G) sind. $N(G)_1 \subseteq N(G)_2$ bedeutet also, dass aus der Unabhängigkeit mod $(G)_1$ die Unabhängigkeit mod $(G)_2$ folgt. $N(G)_1 = N(G)_2$ bedeutet, dass aus der einen Unabhängigkeit die andere folgt.

---

[3]) Vergleiche Alexandroff-Hopf, Definition auf Seite 225.

Wenn wir die Ordnung, die die Beziehung $\subseteq$ zwischen den Mengen $N(G)$ hervorruft, auf die Gruppenmengen (G) übertragen, so erhalten wir eine partielle Ordnung aller Gruppenmengen, die das Verhältnis zwischen der Unabhängigkeiten mod (G) für verschiedene (G) darstellt. Im Folgenden werden wir zeigen, dass diese Ordnung unabhängig von der Wahl der Menge (x_k) ist.

Wir führen die Zeichen $\leq$ und $\approx$ ein, und schreiben

$$(5) \qquad \begin{aligned} &(G)_1 \leq (G)_2 \text{ wenn } N(G)_2 \subseteq N(G)_1, \text{ und} \\ &(G)_1 \approx (G)_2 \text{ wenn } N(G)_2 = N(G)_1 . \end{aligned}$$

Die Hauptaufgabe dieser Abhandlung ist eine Untersuchung der Mengen $N(G)$, der Ordnungsrelation $\leq$ und der Äquivalenz $\approx$

2. — Eine grundlegende Rolle wird in allen folgenden Betrachtungen eine Menge $p(G)$ von Primzahlen spielen, die jeder Menge (G) zugeordnet ist.[4])

Definition 3. $\mathrm{p}(\mathrm{G})$ *ist die Menge aller Primzahlen mit der Eigenschaft, dass für jedes* $\mathrm{p} \in \mathrm{p}(\mathrm{G})$ *wenigstens eine Gruppe* $\mathrm{G} \in (\mathrm{G})$ *und wenigstens ein* $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$ *existiert, derart dass* $\mathrm{g} \neq 0$, $\mathrm{p\,g} = 0$ *ist.*

Bezeichnen wir mit $I(p)$ die Menge aller Vielfachen von p, so gilt

Satz 1. Die Menge $\bigcup_{\mathrm{p}} \mathrm{I}(\mathrm{p})$, $\mathrm{p} \in \mathrm{p}(\mathrm{G})$, *ist identisch mit der Menge* $\mathrm{m}(\mathrm{G})$ *aller ganzen Zahlen* m, *mit der Eigenschaft, dass für jedes* $\mathrm{m} \in \mathrm{m}(\mathrm{G})$ *wenigstens eine Gruppe* $\mathrm{G} \in (\mathrm{G})$ *und wenigstens ein* $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$ *existiert, derart dass* $\mathrm{g} \neq 0$, $\mathrm{m\,g} = 0$ *ist.*

Zuerst beweisen wir die Beziehung $m(G) \subseteq \bigcup_{p} I(p)$, $p \in p(G)$. Ist $m \in m(G)$, so existiert ein Element g' und eine Gruppe G', $g' \in G' \in (G)$, mit der Eigenschaft $m g' = 0$, $g' \neq 0$. Folglich kann m nicht ± 1 sein. Da der Fall $m = 0$ trivial ist, können wir voraussetzen, dass m sich in Primfaktoren zerlegen lässt, also $m = \pm p_1 \cdot p_2 \cdot \cdot \cdot p_n$. Jetzt werden wir zeigen dass wenigstens ein p_i, $i = 1, \ldots, n$, zu $p(G)$ gehören muss, z. B. p_1. Im entgegengesetzten Falle, würde es $p_i g \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, sein, u. zw. für jedes $g \neq 0$. Folglich, wegen $g' \neq 0$, wäre $p_1 g' \neq 0$, als auch $p_1 p_2 g' \neq 0$, u. s. w., endlich auch $mg' = \pm p_1 \cdot p_2 \ldots p_n g' \neq 0$, was jedoch der Eigenschaft von g' widerspricht. Es sei also $p_1 \in p(G)$. Da $m = p_1 \cdot (\pm p_2 \ldots p_n) \in I(p_1)$, so folgt

$$(6) \qquad m \in \bigcup_{p} I(p), \; p \in p(G).$$

Umgekehrt, wenn (6) erfüllt ist, so gibt es ein solches $p' \in p(G)$, dass $m \in I(p')$ und somit $m = qp'$. Dann gibt es ebenso ein Element g' und eine Gruppe G', $g' \in G' \in (G)$, wo $g' \neq 0$,

[4]) Siehe z. B. Satz 6.

$p'g' = 0$, folglich auch $mg' = 0$. Dies bedeutet, dass $m \leqslant m(G)$, und somit $\bigcup_{p} I(p) \subseteq m(G)$, $p \leqslant p(G)$.

Satz 2. Für jede Menge P *von Primzahlen gibt es eine Menge von Gruppen* (G) *mit der Eigenschaft* p (G) = P. *Wenn* P *die leere Menge ist, so haben obige Eigenschaft die Gruppenmengen* (G) = = {D} *und* (G) = {R} *(wo* R *die additive Gruppe der rationalen Zahlen ist). Ist* P *nicht leer, so hat jedenfalls die Menge* $(\mathrm{D_p})$, $\mathrm{p} \leqslant \mathrm{P}$, *die geforderte Eigenschaft. Dabei ist* $\mathrm{D_p}$ *die Faktorgruppe* D / p D.

Beweis: Ist $mg = 0$, $m \leqslant D$, $m \neq 0$; $g \leqslant D$ oder $g \leqslant R$, dann folgt $g = 0$. Die Mengen $p\{D\}$ und $p\{R\}$ sind daher wirklich leer. Es sei nun $p' \leqslant P$, dann ist $D_{p'} \leqslant (D_p)$, $p \leqslant P$. Da es in $D_{p'}$ Elemente gibt mit $g \neq 0$, so wird $p' \leqslant p(D_p)$, $p \leqslant P$, d. h. $P \subseteq \subseteq p(D_p)$, $p \leqslant P$, weil $p' D_{p'} = 0$.

Es sei nun umgekehrt $p' \leqslant p(D_p)$, $p \leqslant P$. Nach Definition 3 gibt es ein $p \leqslant P$, und ein $g \neq 0$, $g \leqslant D_p$, mit der Eigenschaft $p'g = 0$. Das ist nur möglich wenn $p' \equiv 0 \pmod p$ ist. Da p' eine Primzahl ist, wird notwendigerweise $p' = p \leqslant P$. Folglich ist $p(D_p) \subseteq P$, $p \leqslant P$.

3. — Wir führen jetzt, in zweckmässiger Form, einige bekannte Begriffe und Tatsachen an, auf die sich die im Folgenden vorkommenden Beweise stützen.

Definition 4. Unter elementaren Transformationen des Systems $(\mathrm{X_i}) \subseteq \mathrm{D}(\mathrm{x_k})$ *versteht man folgende Abbildungen des Systems* $(\mathrm{X_i})$ *in* $\mathrm{D}(\mathrm{x_k})$:

a) Die Abbildung, die ein Element $\mathrm{X_i}$ *in das Element* $-\mathrm{X_i}$ *überführt, während alle übrigen Elemente aus* $(\mathrm{X_i})$ *unverändert bleiben.*

b) Die Abbildung, die ein Element $\mathrm{X_i}$ *in das Element* $\mathrm{X_i} + \mathrm{X_j}$ *überführt, wo* $\mathrm{X_i} \neq \mathrm{X_j}$; $\mathrm{X_i}$, $\mathrm{X_j} \leqslant (\mathrm{X_i})$, *während alle übrigen Elemente aus* $(\mathrm{X_i})$ *unverändert bleiben.*

H i l f s s a t z 1. Ist $(X_i)'$ ein System, das aus (X_i) durch Anwendung endlich vieler elementarer Transformationen entsteht, so muss es auch umgekehrt möglich sein, in ähnlicher Weise, durch nochmalige Anwendung endlichvieler elementarer Transformationen, (X_i) aus $(X_i)'$ entstehen zu lassen.

H i l f s s a t z 2. Es sei f eine elementare Transformation des Systems (X_i), oder das Produkt einer endlichen Anzahl solcher Transformationen. Wenn (X_i) die Untergruppe $D(X_i) \subseteq D(x_k)$ erzeugt[5]), so erzeugt auch (fX_i) dieselbe Untergruppe. Ist (X_i) unabhängig mod (G), so ist auch (fX_i) unabhängig mod (G). Das gilt für jede Menge (G), insbesondere für $(G) = \{D\}$.

[5]) Eine Menge A von Elementen einer Abelschen Gruppe erzeugt eine Untergruppe dieser Gruppe, wenn die Elemente der Untergruppe mit allen endlichen linearen Kombinationen von Elementen aus A mit ganzzahligen Koeffizienten zusammenfallen. A ist eine Basis der Untergruppe, wenn es diese Untergruppe erzeugt, und unabhängig mod D ist.

Definition 5. Unter elementaren Transformationen einer endlichen ganzzahligen Matrix versteht man die folgenden Transformationen der Matrix:

a) Vorzeichenwechsel einer Zeile [Spalte],

b) Addition einer Zeile [Spalte] zu einer anderen Zeile [Spalte].

Hilfssatz 3. Es sei $\{X_1, .., X_n\}$ ein endliches System von Elementen aus $D(x_k)$, und es gelte

$$X_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_k, \ i = 1, .., n; \ x_k \in (x_k), \ k = 1, .., m. \tag{7}$$

Wenn jetzt f das Produkt von endlichvielen elementaren Transformationen der Zeilen [Spalten] der Matrix (a_{ik}) ist, so gibt es eine Abbildung φ, die das Produkt endlichvieler elementarer Transformationen der Elemente $\{X_1, .., X_n\}$ [der Elemente $\{x_1, .., x_m\}$] ist, mit der Eigenschaft

$$\varphi X_i = \sum_{k=1}^{m} f(a_{ik}) x_k, \tag{8}$$

$$[X_i = \sum_{k=1}^{m} f(a_{ik}) \varphi x_k], \ i = 1, .., n. \tag{9}$$[6]

Hilfssatz 4. Jede endliche ganzzahlige Matrix (die im Allgemeinen auch rechteckig sein kann), kann durch endlichviele elementare Transformationen auf Diagonalform übergeführt werden.[6]

Hilfssatz 5. Es sei (X_i) ein System, das die Untergruppe $D(X_i)$ erzeugt, und $\{X_1, .., X_n\}$ eine endliche Teilmenge von (X_i). Dann gibt es eine endliche Reihe von elementaren Transformationen, die (x_k) in ein System (y_k) überführt, und ebenso eine endliche Reihe von elementaren Transformationen, die (X_i) in ein System (Y_i) überführt. Dabei geht $\{X_1, .., X_n\}$ in ein System $\{Y_1, .., Y_n\} \subseteq \subseteq (Y_i)$ über, für welches

$$\begin{aligned} &Y_i = a_i y_i, \quad a_i \neq 0; \qquad i = 1, .., r \leq n; \\ &Y_i = 0, \qquad\qquad\qquad\quad i = r+1, .., n; \\ &\qquad a_i \in D, \ y_i \in (y_k) \quad \text{gilt.} \end{aligned} \tag{10}$$

(y_k) wird eine Basis von $D(x_k)$, während (Y_i) die Untergruppe $D(X_i)$ erzeugt. Ist ausserdem (X_i) unabhängig mod (G), für irgendein (G), so wird $r = n$.

Beweis: Es sei $X_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_k$, $i = 1, .., n$. Nach Hilfssatz 4 ist es möglich, durch eine endliche Reihe elementarer Transformationen der Zeilen und Spalten, die Matrix (a_{ik}) in Diagonalform überzuführen. Nach Hilfssatz 3, gibt es eine endliche Reihe φ' von elementaren Transformationen der Elemente $\{X_1, .., X_n\}$ und eine endliche Reihe φ'' von elementaren Transformationen der Elementen $\{x_1, .., x_m\}$, mit der Eigenschaft

$$\varphi' X_i = \sum_{k=1}^{m} f(a_{ik}) \varphi'' x_k, \ i = 1, .., n. \tag{11}$$

[6]) Siehe z. B. H. Seifert und W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Leipzig 1934, §§ 86, 87.

Die elementaren Transformationen, aus denen φ' und φ'' zusammengesetzt sind, können als Transformationen des gesamten Systems (X_i) bzw. (x_k) betrachtet werden, falls man festlegt, dass sie alle Elemente ausserhalb des Systems $\{X_1, .., X_n\}$, bzw. $\{x_1, .., x_m\}$ unverändert lassen. Wenn wir $\varphi'(X_i)$ mit (Y_i) und $\varphi''(x_k)$ mit (y_k) bezeichnen, so folgt nach Hilfssatz 2, dass (Y_i) die Untergruppe $D(X_i)$ erzeugt, und dass (y_k) eine Basis der Gruppe $D(x_k)$ ist. Bezeichnen wir endlich mit $Y_1, .., Y_n$ die Elemente aus (Y_i), in welche die $X_1, .., X_n$ übergeführt worden sind, und mit a_i die Elemente auf der Diagonale der Matrix $f(a_{ik})$, so gehen die Relationen (11) in (10) über. Ist ausserdem $(X_i) \leqslant N(G)$, so ist nach Hilfssatz 2, $(Y_i) \leqslant N(G)$. Folglich kann $Y_i = 0$ für kein i gelten, daher $r = n$.

4. — *Satz 3. Hat die Untergruppe* $D(X_i) \subseteq D(x_k)$, *mit der Basis* (X_i), *die Eigenschaft, dass für jedes* $X \leqslant D(x_k)$ *und für jedes* $p \leqslant p(G)$, *die Relation* $X \leqslant D(X_i)$ *aus* $pX \leqslant D(X_i)$ *folgt, so ist* (X_i) *unabhängig mod* (G).

Dies trifft zu, sobald man obige Behauptung für jede endliche Teilmenge von (X_i) nachgewiesen hat. Sei $\{X_1, .., X_n\}$ eine solche Teilmenge. Wenden wir nun Hilfssatz 5 an und betrachten das System $\{Y_1, .., Y_n\}$, welches aus $\{X_1, .., X_n\}$ entsteht. Nach den Hilfssätzen 1 und 2 genügt es zu beweisen, dass $\{Y_1, .., Y_n\} \leqslant N(G)$ ist. Wir beweisen zunächst, dass die Zahlen a_i, $i = 1, .., n$, aus (10) keinen Primfaktor aus $p(G)$ enthalten. Im entgegengesetzten Falle, würde es wenigstens ein a_i geben, z. B. a_1, von der Form $a_1 = pq$, wo $p \leqslant p(G)$. Nach den Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes, würde dann aus $Y_1 = a_1 y_1 = p(q y_1) \leqslant D(X_i)$, die Relation $qy_1 \leqslant D(X_i)$ folgen. Somit wäre $qy_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i + \sum_k \beta_k Y_k$; $\alpha_i, \beta_k \leqslant D$; $Y_k \leqslant (Y_i)$, $Y_k \leqslant' \{Y_1, .., Y_n\}$[7]); und $Y_1 = p q y_1 = \sum_{i=1}^{n} p \alpha_i Y_i + \sum_k p \beta_k Y_k$. Infolge der Unabhängigkeit des Systems (Y_i) würde daraus $1 = p \alpha_1$, was jedoch unmöglich ist, weil p eine Primzahl ist. Wir haben also die Relationen

$$(12) \qquad a_i \leqslant' \bigcup_p I(p), \quad p \leqslant p(G), \quad i = 1, .., n \text{ bewiesen.}$$

Die Unabhängigkeit mod (G) des Systems $\{Y_1, .., Y_n\}$ folgt jetzt unmittelbar aus dem Satze 1. Ist nämlich $\sum_{i=1}^{n} g_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} g_i (a_i y_i) = 0$, so ist nach Hilfssatz 2: $a_i g_i = 0$, $i = 1, .., n$, und daraus ergibt sich $g_i = 0$, $i = 1, .., n$.

Satz 4. Ist das System (X_i) *unabhängig mod* (G), *dann gilt:*

a) (X_i) *ist unabhängig mod* D, *und*

---

[7]) $x \,\varepsilon'\, X$ bedeutet dass x kein Element von X ist.

b) die Untergruppe $D(X_i)$, *die aus* (X_i) *erzeugt worden ist, besitzt die Eigenschaft, dass für jedes* $X \in D(x_k)$ *und jede ganze Zahl* $m \neq 0$, *deren Primfaktoren alle in* $p(G)$ *enthalten sind, die Relation* $X \in D(X_i)$ *aus* $mX \in D(X_i)$ *folgt.*

Beweis. Ist $\{X_1, .., X_n\}$ irgendeine endliche Teilmenge von (X_i), so lässt sich, nach Hilfssatz 5, dieser Teilmenge ein System $\{Y_1, .., Y_n\}$ zuordnen, für welches $Y_i = a_i y_i$, $a_i \neq 0$, $i = 1, .., n$, gilt. Dieses System ist offenbar unabhängig mod D. Nach den Hilfssätzen 1 und 2 folgt jetzt unmittelbar $(X_i) \in N(D)$. Damit ist der erste Teil des Satzes 4 bewiesen.

Wenn die Zahl m keine Primfaktoren hat, d. h. wenn $m = \pm 1$, so ist die Behauptung b) ohne weiteres richtig.

Betrachten wir jetzt den Fall $m = p \in p(G)$. Es sei X irgendein Element aus $D(x_k)$ mit der Eigenschaft $pX \in D(X_i)$. Dann lässt sich pX in der Form

$$pX = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \tag{13}$$

schreiben, wo $\{X_1, .., X_n\} \subseteq (X_i)$, $a_i \in D$. Es sei $\{Y_1, .., Y_n\}$ dasjenige System, das nach Hilfssatz 5 aus $\{X_1, .., X_n\}$ entsteht. Da nach der Voraussetzung $(X_i) \in N(G)$ ist, so gilt $Y_i = a_i y_i$, $a_i \neq 0$, $i = 1, .., n$. Die Zahlen a_i können nicht zur Menge $m(G)$ gehören. Ist nämlich $a_i g = 0$, für ein $i \in \{1, .., n\}$, so wird $gY_i = (a_i g) y_i = 0$, und daraus $g = 0$, weil $(Y_i) \in N(G)$ ist. Nach Satz 1 muss also

$$a_i \in' \bigcup_p I(p),\ p \in p(G),\ i = 1, .., n,\ \text{gelten.}$$

Da das System $\{Y_1, .., Y_n\}$ durch elementare Transformationen aus dem System $\{X_1, .., X_n\}$ entstanden ist, und die Relation (13) besteht, so besteht notwendigerweise eine Relation der Form

$$pX = \sum_{i=1}^{n} \beta_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i y_i . \tag{14}$$

Da andererseits $X \in D(x_k)$, so besteht auch eine Relation der Form

$$X = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i y_i + \sum_k \delta_k y_k ;\ y_i, y_k \in (y_k),\ y_k \in' \{y_1, .., y_n\}. \tag{15}$$

Durch Vergleich von (14) und (15) erhalten wir

$$pX = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i y_i = \sum_{i=1}^{n} p\gamma_i y_i + \sum_k p\delta_k y_k ,\ \text{woraus}$$

$\beta_i a_i = p\gamma_i$; $i = 1, .., n$, folgt. Wegen (12) kann p nicht Teiler eines a_i sein. Da p eine Primzahl ist, so ist p Teiler von β_i, und zwar für alle $i = 1, .., n$. Folglich ist $\beta_i = pq_i$, woraus

$$pX = p\sum_{i=1}^{n} q_i a_i y_i ,\ \text{oder} \qquad X = \sum_{i=1}^{n} q_i Y_i \in D(X_i) \qquad \text{folgt.}$$

Betrachten wir endlich den Fall $m = \pm p_1 \cdot p_2 \, . \, . \, p_n$, $p_i \leqslant p\,(G)$, $i = 1, \ldots, n$. Es sei $mX = p_1\,(\pm p_2 \, . \, . \, p_n)\, X \leqslant D\,(X_i)$. Wegen $p_1 \leqslant p\,(G)$ reduziert sich dieser Fall auf den vorhergehenden, woraus sich $\pm p_2 \, . \, . \, p_n X \leqslant D\,(X_i)$ ergibt. Infolge $p_2 \leqslant p\,(G)$ folgt $\pm p_3 \, . \, . \, p_n X \leqslant D\,(X_i)$. Schrittweise gelangt man zu dem Schluss, dass $X \leqslant D\,(X_i)$ ist.

Der Satz 4 ist im Wesentlichen die Umkehrung des Satzes 3.

Ist (G) die Klasse aller Gruppen, so ist offenbar $p\,(G)$ die Menge aller Primzahlen, so dass aus den Sätzen 3 und 4 das folgende Korollar folgt:

Korollar 1. Für die universale Unabhängigkeit des mod D-unabhängigen Systems (X_i) *ist es notwendig und hinreichend, dass die Untergruppe* $D\,(X_i)$, *die von* (X_i) *erzeugt wird, eine Untergruppe mit Division sei.*[8])

Satz 5. Ist m *eine ganze Zahl, die wenigstens einen Primfaktor* $p \leqslant' p\,(G)$ *enthält, so gibt es ein System* (X_i) *das unabhängig mod* (G) *ist und auch ein Element* $X \leqslant D\,(x_k)$, *mit den Eigenschaften* $m\,X \leqslant D\,(X_i)$ *und* $X \leqslant' D\,(X_i)$.

Beweis. Es sei $m = pq$. Es genügt $(X_i) = \{X_1\} = \{p\,x_1\}$ und $X = \alpha x_1$ zu setzen, wo $\alpha \leqslant' I\,(p)$, $x_1 \leqslant (x_k)$. Aus $gX_1 = pgx_1 = 0$ folgt $pg = 0$. Wegen $p \leqslant' p\,(G)$ ergibt sich dann $g = 0$. Das bedeutet, dass $(X_i) \leqslant N\,(G)$ ist. Weiter gilt $mX = p\,q\,\alpha\,x_1 = q\,\alpha\,X_1 \leqslant D\,(X_i)$. Die Voraussetzung $X \leqslant D\,(X_i)$, die gleichbedeutend mit $X = \beta\,X_1$ d. h. $\alpha\,x_1 = \beta\,p\,x_1$ ist, führt aber auf $\alpha = \beta\,p$ d. h. $\alpha \leqslant I\,(p)$. Dies widerspricht jedoch der Wahl der Zahl α.

5. — Mit Hilfe der Sätze 3, 4 und 5 kommen wir leicht zum

Satz 6. Sind zwei Gruppenmengen $(G)_1$ *und* $(G)_2$ *gegeben, so gilt* $(G)_1 \leq (G)_2$ *dann und nur dann, wenn* $p\,(G)_1 \subseteq p\,(G)_2$.

Beweis. Es sei $(G)_1 \leq (G)_2$, d. h. $N\,(G)_2 \subseteq N\,(G)_1$, und es sei ferner $p \leqslant p\,(G)_1$. Dann hat die Relation $pX \leqslant D\,(X_i)$, nach Satz 4, die Beziehung $X \leqslant D\,(X_i)$ zur Folge, und zwar gilt dies für jedes System $(X_i) \leqslant N\,(G)_2 \subseteq N\,(G)_1$ und für jedes $X \leqslant D\,(x_k)$. Die Voraussetzung $p \leqslant' p\,(G)_2$ würde uns, nach Satz 5, zu einem Widerspruch führen. Daher muss $p \leqslant p\,(G)_2$ sein, woraus $p\,(G)_1 \subseteq p\,(G)_2$ folgt.

Es sei jetzt umgekehrt $p\,(G)_1 \subseteq p\,(G)_2$ und $(X_i) \leqslant N\,(G)_2$. Dann ist, nach Satz 4, (X_i) unabhängig mod D. Die Relation $p\,X \leqslant D\,(X_i)$ zieht weiter, für jedes $p \leqslant p\,(G)_2$ und jedes $X \leqslant D\,(x_k)$, die Beziehung $X \leqslant D\,(X_i)$ nach sich. Dies gilt, wegen $p\,(G)_1 \subseteq p\,(G)_2$, insbesondere für alle $p \leqslant p\,(G)_1$ was, nach Satz 3, auf $(X_i) \leqslant N\,(G_1)$, bzw. $N\,(G)_2 \subseteq N\,(G)_1$, bzw. $(G)_1 \leq (G)_2$ führt.[9])

---

[8]) B ist eine Untergruppe mit Division, einer Gruppe A, falls für jede ganze Zahl $m \neq 0$ und jedes $X \varepsilon A$, aus $mX \varepsilon B$, die Relation $X \varepsilon B$ folgt.

[9]) Mit Anwendung des Hilfssatzes 5 kann Satz 6 auch direkt bewiesen werden.

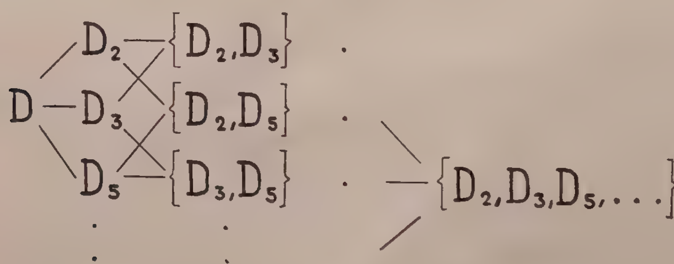
Satz 6 zeigt, dass die partielle Ordnung aller Mengen Abelscher Gruppen unabhängig ist von der Menge (x_k).

Korollar 2. Sind zwei Gruppenmengen $(\mathrm{G})_1$ *und* $(\mathrm{G})_2$ *gegeben, so gilt* $(\mathrm{G})_1 \approx (\mathrm{G})_2$ *dann und nur dann, wenn* $\mathrm{p}\,(\mathrm{G})_1 = \mathrm{p}\,(\mathrm{G})_2$.

Nach Satz 2 und Korollar 2 folgt nun

Satz 7. Ist für eine Gruppenmenge (G), $\mathrm{p}\,(\mathrm{G})$ *leer, dann gilt* $(\mathrm{G}) \approx \{\mathrm{D}\} \approx \{\mathrm{R}\}$. *Ist* $\mathrm{p}\,(\mathrm{G})$ *nicht leer, so gilt* $(\mathrm{G}) \approx (\mathrm{D_p})$, $\mathrm{p} \leqq \mathrm{p}\,(\mathrm{G})$.

Die Sätze 2 und 6 geben uns vollkommene Einsicht in die Klassen (in Bezug auf $\approx$) aller Mengen Abelscher Gruppen, und in die partielle Ordnung solcher Klassen (in Bezug auf $\leq$). Diese Ordnung ist im nächststehenden Schema dargestellt, wo jede Klasse durch einen (nach Satz 7 gewählten) Repräsentanten vertreten ist.[10])



6. — Satz 7 erlaubt uns ein Kriterium aufzustellen, welches uns ermöglicht, die Antwort auf die Frage über die Unabhängigkeit mod (G) eines endlichen Systems $X_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\,x_k$, $i = 1, \ldots, n$, aus der Matrix (a_{ik}) allein herauszufinden. Die Aufgabe reduziert sich hierbei auf die Untersuchung der Unabhängigkeit mod R und mod D_p, wo p eine Primzahl ist.

Im Falle der Unabhängigkeit mod R können wir die Elemente X_i als m-dimensionale Vektoren über dem Körper der rationalen Zahlen auffassen, da die ganzen Zahlen ohnehin rational sind. Aus der allgemeinen Theorie der Vektoren über einem Körper ist bekannt, dass die Gleichung $\varrho = n$ eine notwendige und hinreichende Bedingung ist für die lineare Unabhängigkeit eines Systems von n Vektoren, wobei ϱ den Rang der zugehörigen Matrix bedeutet. In unserem Falle lautet die Bedingung $\varrho\,(a_{ik}) = n$.

Im Falle der Unabhängigkeit mod D_p (p Primzahl), ist von grundlegender Bedeutung die Tatsache, dass aus der additiven Gruppe D_p durch die Produktdefinition $[a] \cdot [b] = [a\,b]$ ein Körper

[10]) Wir folgen der schematischen Darstellung partiell geordneter Mengen nach: Đ. Kurepa, Teorija skupova (Mengenlehre), Zagreb 1951, § 17.

wird. Dabei bedeutet $[a]$ die Klasse mod p, die die ganze Zahl a enthält. Wegen der Relation $n[a] = [n][a]$; $n, a \subset D$, sind die Elemente X_i unabhängig mod D_p dann und nur dann, wenn die Vektoren $[X_i]$, mit den Komponenten $[a_{i1}]$, $[a_{i2}], \ldots,$ $[a_{im}]$; $i = 1, \ldots, n$, unabhängig (über dem Körper D_p) sind, d. h. wenn der Rang $\varrho([a_{ik}]) = n$ ist. (Der Rang $\varrho([a_{ik}])$ ist die grösste ganze Zahl ϱ mit der Eigenschaft, dass es wenigstens eine quadratische Submatrix der Ordnung ϱ gibt, deren Determinante $\neq 0$ ist.)

Wir führen jetzt den Begriff des Ranges mod p einer ganzzahligen Matrix ein.

Definition 6. Der Rang mod p *einer ganzzahligen Matrix* (a_{ik}) *ist die grösste ganze Zahl* $\varrho = \varrho_p(a_{ik})$ *mit der Eigenschaft, dass es eine quadratische Submatrix* $(a_{ik})'$ *der Ordnung* ϱ *gibt, deren Determinante der Relation*

(16) $$\det(a_{ik})' \text{ non} \equiv 0 \pmod{p}$$

genügt.

Wegen der Relationen $[a] + [b] = [a+b]$ und $[a] \cdot [b] = [a\,b]$ gilt offenbar für jede ganzzahlige quadratische Matrix (b_{ik}) die Gleichung $\det([b_{ik}]) = [\det(b_{ik})]$, so dass der Rang $\varrho([a_{ik}])$ im Körper D_p mit dem Range $\varrho_p(a_{ik})$ zusammenfällt. Auf Grund des Vorhergesagten sind wir zu einem neuen Satz gelangt:

Satz 8. Ein endliches System von n *Elementen* $X_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_k$, $i = 1, \ldots, n$, *ist unabhängig mod* (G) *dann und nur dann, wenn für jedes* p $\subset$ p (G) *die Gleichung* $\varrho_p(a_{ik}) = n$ *erfüllt ist. Ist* p (G) *leer, so lautet die notwendige und hinreichende Bedingung für die Unabhängigkeit mod* (G) : $\varrho(a_{ik}) = n$.

7. — Zum Schluss weisen wir noch auf den Umstand hin, dass es in jeder Abelschen Gruppe G möglich ist zwei Arten von Systemen von Lineargleichungen zu betrachten, u. zw.:

(17) $$\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, g_k = h_i\,;\ i = 1, \ldots, n; \quad a_{ik} \subset D;\ g_k, \quad h_i \subset G\,,$$

(18) $$\sum_{k=1}^{m} a_k\, g_{ik} = h_i\,;\ i = 1, \ldots, n; \quad a_k \subset D;\ g_{ik}\,,\ h_i \subset G\,.$$

Der Satz 8 löst die Frage der Existenz einer nichttrivialen Lösung des Systems (17) im Falle $h_i = 0$, denn die Existenz nichttrivialer Lösungen ist äquivalent mit der linearen Abhängigkeit mod G der Elemente

$$X_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\, x_i\,,\ k = 1, \ldots, m.$$

Mit anderen Worten, der Satz 8 löst die Frage der Eindeutigkeit der Lösungen des allgemeinen Systems (17),falls diese Lösungen existieren.

Auf die analoge Frage für das System (18) gehen wir in dieser Abhandlung nicht ein. Es handelt sich hierbei um die Unabhängigkeit mod D in der Gruppe $G(x_k)$.

O NEZAVISNOSTI *mod* (*G*) CJELOBROJNIH LINEARNIH FORMI

Sibe Mardešić, Zagreb

Sadržaj

U članku se polazi od nekog skupa (x_k) elemenata x_k[1]) i promatra grupa $G(x_k)$ koju tvore sve konačne linearne forme (1) elemenata x_k sa koeficijentima g_k iz neke Abelove grupe G.[2])

Među grupama $G(x_k)$ istaknuta uloga se pridaje grupi $D(x_k)$, gdje je D grupa cijelih brojeva. Relacijom (3) uvodi se množenje elemenata $g \in G$ s elementima $X \in D(x_k)$, što omogućuje uvođenje osnovnog pojma: nezavisnosti nekog sistema (X_i) elemenata iz $D(x_k)$ s obzirom na skup Abelovih grupa (G). U daljnjem se taj pojam označuje kao »*nezavisnost mod* (G)«.

Definicija 1. Sistem $(\mathrm{X_i}) \subseteq \mathrm{D}(\mathrm{x_k})$ *je nezavisan mod* (G), *ako za svaki konačni dio* $\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X_n}\} \subseteq (\mathrm{X_i})$ *i za svaku grupu* $\mathrm{G} \in (\mathrm{G})$, *iz relacije* (4) *slijedi* $\mathrm{g_i} = 0$, $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}$.

Sa $N(G)$ označuje se skup svih sistema $(X_i) \subseteq D(x_k)$ koji su nezavisni mod (G) i uvodi uređajna relacija $\leq$ među skupove (G) Abelovih grupa, stavljajući $(G)_1 \leq (G)_2$ ako je $N(G)_2 \subseteq N(G)_1$, t. j. ako iz nezavisnosti mod $(G)_2$ slijedi nezavisnost mod $(G)_1$. Nadalje se uvodi relacija ekvivalencije $\approx$, stavljajući $(G)_1 \approx (G)_2$, ako je $N(G)_1 = N(G)_2$, t. j. ako iz prve nezavisnosti slijedi druga i obrnuto.

Cilj je radnje ispitati skupove $N(G)$, uvedeni uređaj i uvedenu klasifikaciju među skupovima grupa (G).

Osnovnu ulogu u daljnjim razmatranjima igra izvjestan skup prostih brojeva $p(G)$ pridružen svakom skupu (G).

Definicija 2. $\mathrm{p}(\mathrm{G})$ *je skup svih prostih brojeva* p *sa svojstvom da, za svaki* $\mathrm{p} \in \mathrm{p}(\mathrm{G})$, *postoji bar jedna grupa* $\mathrm{G} \in (\mathrm{G})$ *i bar jedan element* $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$, $\mathrm{g} \neq 0$, *za koji je* $\mathrm{p\,g} = 0$.

Dokazuju se zatim slijedeći teoremi:

Teorem 1. Skup $\bigcup_{\mathrm{p}} \mathrm{I}(\mathrm{p})$, $\mathrm{p} \in \mathrm{p}(\mathrm{G})$, *podudara se sa skupom* $\mathrm{m}(\mathrm{G})$ *svih cijelih brojeva* m *sa svojstvom da, za svaki* $\mathrm{m} \in \mathrm{m}(\mathrm{G})$, *postoji bar jedna grupa* $\mathrm{G} \in (\mathrm{G})$ *i bar jedan element* $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$, $\mathrm{g} \neq 0$, *za koji je* $\mathrm{m\,g} = 0$. *Pri tome* $\mathrm{I}(\mathrm{p})$ *znači skup svih višekratnika od* p.

Teorem 2. Za svaki skup P *prostih brojeva, postoji skup* (G), *takav da je* $\mathrm{p}(\mathrm{G}) = \mathrm{P}$. *Ako je* P *prazan skup, tada imaju željeno svojstvo skupovi* $(\mathrm{G}) = \{\mathrm{D}\}$ *i* $(\mathrm{G}) = \{\mathrm{R}\}$, *gdje je* R *aditivna grupa racionalnih brojeva. Ako* P *nije prazan, tada skup* $(\mathrm{D_p})$, $\mathrm{p} \in \mathrm{P}$, *ima gornje svojstvo; pri tome je* $\mathrm{D_p}$ *faktorska grupa* D/pD.

---

[1]) Sa (a) se označuje skup s općim elementom a, dok $\{a_1, \ldots, a_n\}$ znači skup od n elemenata $a_1, \ldots, a_n$.

[2]) Ovakvi odnosi javljaju se u algebarskoj topologiji, gdje su x_k elementi nekog kompleksa, a $G(x_k)$ grupa svih konačnih lanaca sa koeficijentima iz G. (Vidi P. Alexandroff u. H. Hopf, Topologie, Berlin 1935, str. 168—169.)

Kao priprema za dokaze glavnih teorema uvode se sada neki, inače poznati, pojmovi i rezultati. Tako se definiraju elementarne transformacije nekog sistema $(X_i) \subseteq D(x_k)$ i elementarne transformacije redaka i stupaca neke cjelobrojne matrice (a_{ik}) (vidi definicije 4 i 5) i navode neka jednostavna svojstva tih transformacija. Konačno se dokazuje slijedeća lema:

Lema. Neka je (X_i) sistem koji izvodi[3]) podgrupu $D(X_i) \subseteq \subseteq D(x_k)$, i neka je $\{X_1, \ldots, X_n\}$ jedan konačan dio od (X_i). Tada postoji konačan niz elementarnih transformacija, koji prevodi sistem (x_k) u neki sistem (y_k), i konačan niz elementarnih transformacija, koji prevodi sistem (X_i) u neki sistem (Y_i).

Pri tome $\{X_1, \ldots, X_n\}$ prelazi u neki sistem $\{Y_1, \ldots, Y_n\} \subseteq \subseteq (Y_i)$ za koji vrijede relacije (10). Nadalje, sistem (Y_i) izvodi podgrupu $D(X_i)$, a (y_k) je baza grupe $D(x_k)$. Ako je osim toga (X_i) nezavisan mod (G) za neki (G), tada vrijedi $r = n$.

Uz pomoć navedene leme dokazuju se slijedeći teoremi:

Teorem 3. Ako podgrupa $\mathrm{D}(\mathrm{X}_i) \subseteq \mathrm{D}(\mathrm{x}_k)$, *kojoj je* (X_i) *jedna baza, ima svojstvo da za svaki* $\mathrm{X} \leqslant \mathrm{D}(\mathrm{X}_i)$ *i svaki* $\mathrm{p} \leqslant \mathrm{p}(\mathrm{G})$, *iz* $\mathrm{pX} \leqslant \mathrm{D}(\mathrm{X}_i)$ *slijedi* $\mathrm{X} \leqslant \mathrm{D}(\mathrm{X}_i)$, *tada je sistem* (X_i) *nezavisan mod* (G).

Teorem 4. Ako je sistem (X_i) *nezavisan mod* (G), *tada je:*

a) (X_i) *nezavisan mod* D.

b) Podgrupa $\mathrm{D}(\mathrm{X}_i)$, *koju* (X_i) *izvodi, ima svojstvo da, za svaki* $\mathrm{X} \leqslant \mathrm{D}(\mathrm{x}_k)$ *i svaki cijeli broj* $\mathrm{m} \neq 0$, *kome su svi prosti faktori sadržani u* p (G), *iz relacije* $\mathrm{mX} \leqslant \mathrm{D}(\mathrm{X}_i)$ *slijedi* $\mathrm{X} \leqslant \mathrm{D}(\mathrm{X}_i)$.

Teorem 4 u biti je obrat teorema 3.

Ako je (G) klasa svih Abelovih grupa, nezavisnost mod (G) naziva se *»univerzalnom nezavisnošću«*. U tom slučaju je očito p (G) skup svih prostih brojeva, pa teoremi 3 i 4 vode na ovaj

Korolar 1. Da nezavisni sistem $(\mathrm{X}_i) \subseteq \mathrm{D}(\mathrm{x}_k)$ *bude univerzalno nezavisan, nužno je i dovoljno da podgrupa* $\mathrm{D}(\mathrm{X}_i)$, *koju* (X_i) *izvodi, bude jedna podgrupa s dijeljenjem.*[4])

Teoremom 5 pokazuje se da se u izreci teorema 4 ne mogu oslabiti pretpostavke o broju m.

Kao posljedica teorema 3, 4 i 5 izvodi se sada

Teorem 6. Za dva sistema grupa $(\mathrm{G})_1$ *i* $(\mathrm{G})_2$ *je* $(\mathrm{G})_1 \leq (\mathrm{G})_2$ *onda i samo onda, ako je* $\mathrm{p}(\mathrm{G})_1 \subseteq \mathrm{p}(\mathrm{G})_2$.

Teoremi 2 i 6 daju potpuni uvid u izučavani parcijalni uređaj skupova (G) i pokazuju da je taj uređaj nezavisan o polaznom skupu (x_k).

---

[3]) Skup A elemenata neke Abelove grupe izvodi jednu podgrupu te grupe, ako se elementi te podgrupe podudaraju sa konačnim linearnim kombinacijama elemenata od A, sa cjelobrojnim koeficijentima. Skup A je baza podgrupe, ako tu podgrupu izvodi i nezavisan je mod D.

[4]) B je podgrupa s dijeljenjem grupe A, ako za svaki cijeli broj $m \neq 0$ i svaki $X \varepsilon A$, iz $mX \varepsilon B$ slijedi $X \varepsilon B$.

Iz teorema 6 slijedi neposredno i

Korolar 2. Za dva sistema grupa $(G)_1$ *i* $(G)_2$ *je* $(G)_1 \approx (G)_2$ *onda i samo onda, ako je* $p\,(G)_1 = p\,(G)_2$.

Ovim korolarom, uz pomoć teorema 2, utvrđuje se, da je sa svakim skupom (G) ekvivalentna ili grupa R racionalnih brojeva (slučaj kada je $p\,(G)$ prazan), ili skup (D_p), $p \lessgtr p\,(G)$ (slučaj kada $p\,(G)$ nije prazan). Rečeno sačinjava sadržaj teorema 7.

Na priloženoj slici je shematski predočen parcijalni uređaj svih klasa skupova (G)[5]. Pri tome svaku klasu zastupa po jedan predstavnik, odabran prema teoremu 7.

U daljnjem se iskorištava činjenica da se svakom cijelom broju a može na prirodan način pridružiti jedan element iz R (naprosto a), odn. jedan element iz D_p (ona klasa mod p koja sadrži broj a). Ispitivanje nezavisnosti mod (G) konačnog sistema elemenata $\{X_1, \ldots, X_n\} \subseteq D\,(x_k)$, svodi se tada na ispitivanje nezavisnosti izvjesnih vektora nad poljem R, odn. poljem D_p (p je prost broj). Koristeći opće poznate rezultate o nezavisnosti vektora nad nekim poljem dobiva se

Teorem 8. Konačni sistem elemenata (7) *je nezavisan mod* (G) *onda i samo onda ako, za svaki* $p \lessgtr p\,(G)$, *vrijedi* $\varrho_p\,(a_{ik}) = n$. *U slučaju kada je* $p\,(G)$ *prazan, za nezavisnost mod* (G) *je nužno i dovoljno da bude* $\varrho\,(a_{ik}) = n$.

Pri tome $\varrho\,(a_{ik})$ znači rang matrice (a_{ik}), dok $\varrho_p\,(a_{ik})$ znači rang mod p matrice (a_{ik}), koji je definiran kao najveći cijeli broj ϱ sa svojstvom da postoji jedna kvadratna submatrica $(a_{ik})'$ reda ϱ sa determinantom, koja zadovoljava (16).

Na kraju se ukazuje na okolnost, da u svakoj Abelovoj grupi G ima smisla promatrati dvije vrste sistema linearnih jednadžbi: sisteme oblika (17) i (18). Teoremom 8 riješeno je pitanje egzistencije netrivijalnih rješenja sistema (17) u homogenom slučaju.

(Primljeno 18. VI. 1953.)

---

[5]) Pri shematskom predočivanju parcijalno uređenih skupova držimo se knjige: Đ. Kurepa, Teorija skupova. Zagreb 1951, § 17.

ÜBER DIE ISOTROPEN STRAHLENPAARE 2. ART DER STRAHLENKONGRUENZEN 1. ORDNUNG 3., 2. UND 1. KLASSE

Vilko Niče, Zagreb

In meiner Abhandlung »Regelflächen mit lauter isotropen Erzeugenden in den Strahlenkongruenzen 1. Ordnung 3., 2. und 1. Klasse« habe ich in den fünf bekannten Strahlenkongruenzen 1. Ordnung isotrope Strahlenpaare untersucht, aber nur diejenigen 1. Art. In der Abhandlung war dies zwar nicht ausdrücklich betont, aber aus dem Inhalte leicht ersichtlich. Nicht achtend auf diese Tatsache wurde am Ende der Abhandlung versehentlich die Behauptung ausgesprochen, dass die elliptische lineare Strahlenkongruenz keine Regelfläche mit lauter isotropen Erzeugenden enthält. Da aber die Regelflächen isotroper Erzeugenden in den erwähnten Strahlenkongruenzen nicht nur ∞^1 isotrope Strahlenpaare 1. Art, sondern auch die ∞^2 isotrope Strahlenpaare 2. Art enthalten, stimmt offenbar die so ausgesprochene Behauptung nicht, worauf auch K. Strubecker am Ende seines Referates*) angewiesen hat. Die Regelfläche isotroper Erzeugenden in einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz enthält zwar keine isotropen Strahlenpaare 1. Art, aber dafür ∞^2 isotrope Strahlenpaare 2. Art, die in der erwähnten Abhandlung nicht betrachtet wurden. Deshalb sollen nun die isotropen Strahlenpaare 2. Art in den fünf bekannten Strahlenkongruenzen 1. Ordnung kurz besprochen werden.

Bekanntlich können die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Fläche 2. Ordnung als Doppelpunkte der Involution konjugierter Pole auf dieser Geraden betrachtet werden. Sind zwei Geraden konjugiert bezüglich einer Regelfläche 2. Ordnung, bilden die Verbindungsgeraden der Doppelpunkte ihrer Involutionen konjugierter Pole vier Erzeugenden dieser Regelfläche. Die Doppelpunkte dieser beiden Involutionen sind alle entweder reel, oder imaginär. Im Falle elliptischer Involution auf diesen konjugierten Geraden bilden die Verbindungsgeraden ihrer Doppelpunkte zwei Paare imaginärer Erzeugenden 2. Art dieser Regelfläche 2. Ordnung.

---

* Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete, B. 43 (1952), p. 362.

Die unendlich ferne Achse des Ebenenbüschels der parallelen Ebenen der Kreisschnitte eines einschaligen Hyperboloides und die Gerade der Mittelpunkte dieser Kreisschnitte sind zwei konjugierte Geraden bezüglich des einschaligen Hyperboloides. Die Involutionen konjugierter Pole dieser Geraden sind elliptisch. Die Doppelpunkte der Involution auf der unendlich fernen Achse sind deren Schnittpunkte mit dem apsoluten Kegelschnitte. Die Verbindungsgeraden der Doppelpunkte dieser Involutionen bilden also zwei Paare isotroper Erzeugenden 2. Art des einschaligen Hyperboloides. Jede der beiden Erzeugendenscharen des Hyperboloides enthält eines dieser zwei Paare. Der zweite Ebenenbüschel paralleler Kreisschnitte bildet ebenso das zweite Doppelpaar isotroper Erzeugenden 2. Art des einschaligen Hyperboloides.

Die Kongruenzen 1. Ordnung 3. und 2. Klasse enthalten je eine Erzeugendenschar der ∞^2 Regelflächen 2. Ordnung (Hyperboloide) in diesen Kongruenzen. Zwei Paare isotroper Erzeugenden 2. Art jeder dieser Schar auf jeder dieser Regelfläche 2. Ordnung sind isotrope Strahlenpaare 2. Art dieser Kongruenzen. Diese ∞^2 isotropen Strahlenpaare jeder dieser Kongruenzen sind also ein Bestandteil ihrer von lauter isotroper Erzeugenden gebildeter Regelfläche.

Die lineare Strahlenkongruenzen enthalten je eine Erzeugendenschar der ∞^3 Regelflächen 2. Ordnung in diesen Kongruenzen, von denen ihrer ∞^1 dasselbe isotrope Strahlenpaar 2. Art enthalten. Die Regelfläche isotroper Erzeugenden dieser Strahlenkongruenzen enthält also ebenfals ∞^2 isotroper Strahlenpaare 2. Art. Die ∞^1 isotropen Strahlenpaare 1. Art der linearen hyperbolischen und parabolischen Strahlenkongruenzen bilden bekanntlich eine Regelfläche 4. Ordnung und VII. b. z. w. VIII. Art, die zusammen mit den ∞^2 isotropen Strahlenpaaren 2. Art die Fläche isotroper Erzeugenden dieser Strahlenkongruenzen bilden. Die elliptische lineare Strahlenkongruenz enthält keine isotropen Strahlenpaare 1. Art, da sie keine reelle Leitgerade besitzt in deren reellen Punkten sich ihre isotropen Strahlenpaare 1. Art schneiden könnten. Die Regelfläche isotroper Erzeugenden dieser linearen Strahlenkongruenz enthält deswegen nur die ∞^2 isotropen Strahlenpaare 2. Art.

Die Regelfläche isotroper Erzeugenden der rotatorischen linearen Strahlenkongruenzen (der elliptischen und der hyperbolischen) enthält das Paar isotroper Ebenen der Achse dieser rotatorischen Strahlenkongruenzen. Bei der hyperbolischen rotatorischen linearen Strahlenkongruenz gehören die isotropen Strahlenpaare 1. und 2. Art dieser isotroper Ebenen den Erzeugenden der Regelfläche isotroper Erzeugenden dieser Strahlenkongruenz an, während bei der elliptischen rotatorischen linearen Strahlenkongruenz nur die isotropen Strahlenpaare 2. Art dieser isotropen Ebenen die Erzeugenden der genannten Regelfläche bilden.

O IZOTROPNIM ZRAKAMA 2. VRSTE U KONGRUENCIJAMA 1. REDA 3., 2. I 1. RAZREDA

Vilko Niče, Zagreb

Sadržaj

U radnji »Plohe izotropnih izvodnica u kongruencijama 1. reda 3., 2. i 1. razreda« istražio sam u tim kongruencijama parove izotropnih zraka i to samo ∞^1 parova onih 1. vrste, a da to u tekstu nisam izričito istaknuo. Imajući na umu samo izotropne izvodnice 1. vrste, ustvrdio sam nepažnjom na kraju radnje, da u eliptičkoj linearnoj kongruenciji ne postoji pravčasta ploha sa samim izotropnim izvodnicama. Ovo dakako ne odgovara istini, (na što je upozorio i K. Strubecker na kraju referata*) o toj radnji), ako se uzme u obzir, da na svakoj plohi izotropnih izvodnica u spomenutim kongruencijama, osim ∞^1 parova izotropnih izvodnica 1. vrste, postoji i ∞^2 izotropnih izvodnica 2. vrste. Na plohi izotropnih izvodnica u eliptičkoj linearnoj kongruenciji ne postoji onih ∞^1 parova izotropnih izvodnica 1. vrste, ali dakako postoji onih ∞^2 parova izotropnih izvodnica 2. vrste. Pogledajmo sada tih ∞^2 parova izotropnih zraka 2. vrste.

Iz činjenice, da na jednoplošnom hiperboloidu postoje dva sistema usporednih kružnih presjeka proizlazi, da na svakom takvom hiperboloidu postoje 4 para izotropnih izvodnica 2. vrste, od kojih po dva para pripadaju svakom sistemu izvodnica. U kongruencijama 1. reda 3. i 2. razreda ima ∞^2 jednoplošnih hiperboloida, kojima su izvodnice jednog sistema zrake tih kongruencija. Po dva para izotropnih izvodnica 2. vrste svakog tog hiperboloida su prema tome također zrake tih kongruencija, a odavle izlazi da se i ovih ∞^2 parova izotropnih zraka 2. vrste nalaze na plohi izotropnih izvodnica tih kongruencija, osim onih poznatih ∞^1 takvih parova 1. vrste. U linearnim kongruencijama ima ∞^3 hiperboloida, ali ∞^1 od njih prolazi uvijek istim parom izotropnih izvodnica 2. vrste. Plohe izotropnih izvodnica u ovakvim kongruencijama imaju prema tome također ∞^2 izotropnih izvodnica 2. vrste. Dok ovakva ploha u hiperboličkoj i paraboličkoj linearnoj kongruenciji, koja je, kao što znamo, 4. reda, a VII. odnosno VIII. vrste, ima i ∞^1 parova izotropnih izvodnica 1. vrste, na takvoj plohi u eliptičkoj linearnoj kongruenciji ne postoji tih ∞^1 parova takvih izvodnica 1. vrste, nego samo onih ∞^2 parova izotropnih izvodnica 2. vrste. Eliptička linearna kongruencija nema naime realnih ravnalica, u čijim realnim točkama bi se parovi takvih izotropnih zraka 1. vrste mogli sjeći.

Kod rotacionih linearnih kongruencija su sastavni dio plohe izotropnih izvodnica tih kongruencija izotropne ravnine, koje se sijeku u osi tih kongruencija. U hiperboličkoj takvoj kongruenciji su svi izotropni pravci 1. i 2. vrste u tom paru izotropnih ravnina izvodnice njene plohe izotropnih izvodnica, dok su u eliptičkoj takvoj kongruenciji samo izotropni pravci 2. vrste u tom paru izotropnih ravnina izvodnice njene plohe izotropnih izvodnica.

(Primljeno 20. VI. 1953.)

O RJEŠENJIMA JEDNE FUNKCIONALNE JEDNAČINE

Mahmud Bajraktarević, Sarajevo

U radu [1] Jean Anastassiadis dokazao je slijedeće teoreme:

A) Semi-opadajuća funkcija $f(x) > 0$, za $x > 0$, koja zadovoljava funkcionalnu jednačinu

$$f(x+1) = \frac{1}{xf(x)}, \tag{a}$$

identična je sa $G(x)$.

B) Semi-konveksna i pozitivna funkcija za $x > 0$, koja zadovoljava (a), identična je sa $G(x)$.

Ovdje je funkcija $G(x)$ definisana [2] sa

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x+1)(x+3)\ldots(x+2n-1)}{x(x+2)\ldots(x+2n-2)\sqrt{x+2n}}.$$

Pored ovih dviju teorema u navedenom radu dokazane su još dvije, koje pretstavljaju generalizaciju navedenih dviju.

Kako iz same formulacije ovih teorema tako i iz načina njihovog dokazivanja slijedi, da su one dokazane samo za $x > 0$. Međutim lako se dokazuje, da ovi rezultati vrijede za skoro sve realne vrijednosti od x, a dokaz se može izvesti i bez pretpostavke da je $f(x) > 0$ za $x > 0$. Posmatrat ćemo odmah opći slučaj.

Neka je $f(x)$ *ma kakva funkcija, koja zadovoljava slijedeće uslove:*

1^0 $f(x)$ *je definisana za* $x \in I$ *gdje je* I *skup svih realnih brojeva različitih od* $-r_i - k$ ($i = 0, 1, \ldots, N$; $k = 0, 1, 2, \ldots$; $r_0 = 0$, $r_i \leq r_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$).

2^0

$$f(x) f(x+1) = \prod_{i=0}^{N} \frac{1}{x + r_i} \quad (x \in I). \tag{1}$$

3^0 $f(x)$ *je semi-opadajuća* [1] *funkcija za* $x > 0$, t. j.

$$f(x+1) \leq f(x) \quad (x > 0), \tag{2}$$

ili, $f(x)$ *je semi-konveksna* [1] *funkcija za* $x > 0$, t. j.

$$f(x+1) \leq \frac{1}{2}\left[f(x) + f(x+2)\right] \quad (x > 0). \tag{3}$$

Pod ovim uslovima je identički f (x) = F (x) (x $\leqq$ I), *gdje je*

$$F(x) = \prod_{i=0}^{N} G(x + r_i).$$

D o k a z. Prije svega ćemo dokazati da je $f(x) > 0$ $(x > 0)$.

Pretpostavimo prvo da je ispunjen uslov (2) i da je za jednu određenu pozitivnu vrijednost od x, $f(x) < 0$. Tada iz (2) slijedi

$$f^2(x) \leq f(x) f(x+1) = \prod_{i=0}^{N} (x + r_i)^{-1} \leq f^2(x+1) \leq \prod_{i=0}^{N} (x + r_i + 1)^{-1},$$

odakle se dobija

$$\prod_{i=0}^{N} \left(1 + \frac{1}{x + r_i}\right) \leq 1,$$

što je nemoguće s obzirom da je, zbog $x > 0$ i $r_i \geq 0$, $\dfrac{1}{x + r_i} > 0$.

Pretpostavimo sada da je ispunjen uslov (3). Iz (3), stavljajući mjesto x redom $x+1, x+2, \ldots, x+n-2$ $(n = 2, 3, \ldots)$ i sumirajući dobijene nejednakosti, dobija se nejednakost

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} f(x+\nu) \leq \frac{1}{2}\Big[f(x) + f(x+1) + f(x+n-1) + f(x+n)\Big] + \sum_{\nu=2}^{n-2} f(x+\nu),$$

koja može biti napisana u obliku

$$f(x+1) + f(x+n-1) \leq f(x) + f(x+n) \quad (x > 0\,;\ n = 2, 3, \ldots).$$

Ova nejednakost pokazuje, da vrijednost funkcije $f(x) + f(x+n)$ ne raste, kad se argumenat prvog sabirka poveća, a drugog smanji za jedinicu. Ako nastavimo ovaj proces sa argumentima, uz pretpostavku da je $n = 2k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, dolazimo do niza nejednakosti, između kojih je važno istaknuti nejednakost

$$2f(x+k) \leq f(x) + f(x+2k) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Pretpostavimo sada, da je za jednu određenu pozitivnu vrijednost od x, $f(x) < 0$, pa prema (1), i $f(x+m) < 0$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Tada bi, prema (4), bilo $2f(x+k) < f(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Iz ove nejednakosti i nejednakosti, koja proizlazi iz nje stavljajući $k+1$ mjesto k, dobila bi se nejednakost $4f(x+k)f(x+k+1) > f^2(x)$. Međutim je, prema (1) $f(x+k)f(x+k+1) = \prod_{i=0}^{N} (x+k+r_i)^{-1}$, tako da bi posljednja nejednakost postala

$$4\prod_{i=0}^{N} (x+k+r_i)^{-1} > f^2(x),$$

odakle bi slijedilo

$$k < -x + \sqrt[N]{\frac{4}{f^2(x)}} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

što je nemoguće.

Uzevši u obzir [1] da je $f(x) \equiv F(x)$ $(x > 0)$, pretpostavimo da je za jednu određenu vrijednost od x:[1])

$$f(x - n) = F(x - n) \quad (n = 0, 1, \ldots, N_1),$$

gdje je $\quad 0 < x < 1, \; x \neq a_i, \; a_i = [r_i + 1] - r_i.$

Tada je, s obzirom na (1),

$$f(x - N_1 - 1)\, f(x - N_1) = F(x - N_1 - 1)\, F(x - N_1)$$

odakle, zbog $f(x - N_1) = F(x - N_1) \neq 0$, slijedi $f(x - N_1 - 1) = F(x - N_1 - 1)$, t. j. $f(x - n) = F(x - n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, što je i trebalo dokazati.

Primjedba I. Ako se pretpostavi neprekidnost funkcije $f(x)$ u svima tačkama $x = -r_i - k$ u kojima je funkcija $F(x)$ definisana, onda je i u tim tačkama $f(x) = F(x)$.

Primjedba II. Posmatrajmo funkcionalnu jednačinu

$$g(x)\, g(x+1) = \frac{1}{(x + \varrho_0)(x + \varrho_1) \ldots (x + \varrho_N)}, \tag{5}$$

gdje su ϱ_i $(i = 0, 1, \ldots, N)$ dati realni brojevi, koji ispunjavaju samo uslove $\varrho_i \leq \varrho_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$. Zamjenjujući x sa $x + \varrho$, $\varrho + \varrho_0 = 0$, i uvodeći nove oznake $f(x) = g(x + \varrho)$, $r_i = \varrho + \varrho_i$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$, jednačina (5) postaje (1). Na taj način je otpalo ograničenje, kojem je bio podvrgnut niz brojeva r_i navedeno u uslovu 1^0.

(Primljeno 27. VIII. 1953.)

Literatura:

[1] J. Anastassiadis, Fonctions semi-monotones et semi-convexes et solutions d'une équation fonctionnelle, Bull. Sci. Math., Paris 1952, T. LXXVI, p. 148—160.

[2] N. Nörlund, Differenzenrechnung, Berlin, Springer, 1927, p. 116—117.

[1]) $[x]$ je najveći cio pozitivan broj koji nije veći od x.

SUR LES SOLUTIONS D' UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

M. Bajraktarević, Sarajevo

Résumé

Soit $f(x)$ une fonction satisfaisant aux conditions:

1^0 $f(x)$ est définie pour $x \leqq I$, I étant l'ensemble de tous les nombres réels différents de $-r_i - k$ $(i = 0, 1, \ldots, N;\ r_0 = 0,\ r_i \leq \leq r_{i+1},\ i = 0, 1, \ldots, N-1)$.

2^0 $f(x)$ vérifie (1) et l'une des conditions (2) ou (3).

Sous ces conditions on a identiquement $f(x) = F(x)$ $(x \leqq I)$.

Ce résultat a été déjà obtenu par M. Jean Anastassiadis [1] pour $x > 0$ et sous la condition supplémentaire $f(x) > 0$ pour $x > 0$.

OSVRT NA JEDNU RASPRAVU M. KATALINIĆA

Stanko Hondl, Zagreb

Haec est vis centrifuga, qua corpus urget circulum.
Newton, *Principia*, 2. izdanje.

U časopisu »Bilten na društvoto na matematičarite i fizičarite od Narodna Republika Makedonija, kniga III, Skopje, 1952« izašla je god. 1953. rasprava Marina Katalinića »O centrifugalnoj sili u našim školskim knjigama« (str. 15.—27.). U prvom njezinu dijelu ispravljaju se školske knjige, jer prikazuju centrifugalnu (cf.) silu »manjkavo, katkada i nezdravo«, »sa nedostacima« i »netačnostima«. O toj će sili »vrlo različite i čudnovate slike ponijeti iz škole đaci različitih krajeva«, premda je pitanje cf. sile u znanosti »već davno skinuto s dnevnoga reda«, t. j. riješeno. O tom dakle pisati »može biti vrlo dosadno«, ali »će biti korisno«. Zato se, ukratko rečeno, te »pogreške ... kritiziraju« (v. engleski sadržaj na kraju rasprave).

Kako se u toj raspravi spominje i moja »Fizika za više razrede srednjih škola«, 2. i 3. izdanje, neka mi je dopušteno, da se osvrnem redom na sve piščeve primjedbe, koje se tiču te knjige. Pripominjem, da sam predmet prikazao jednako u sva četiri izdanja Fizike, i to g. 1922., 1927., 1940. i 1943. I još dodajem, da sam g. 1924. publicirao jednu raspravu o cf. sili u »Nastavnom Vjesniku« (knjiga XXXII,. 22 strane). Tamo sam spomenuo Newtona (*Principia*), koji je na dva načina odredio centripetalnu (cp.) silu. U drugom postupku Newton je odredio još i silu, kojom tijelo pri gibanju u kružnici »tišti kružnicu« (*impingit in circulum*), i najposlije je izjavio: »To je centrifugalna sila, kojom tijelo napreže kružnicu«. Tako stoji u drugom izdanju *Principia;* u prvom je izdanju u toj rečenici pridjev »centrifugalna« manjkao. Po Newtonu dakle cf. sila ne djeluje na tijelo, koje se giblje u kružnici, već »na mehanizam — rekao sam u onoj raspravi —, koji tijelo sili na kružno gibanje«. Odmah ću reći, da tu Newtonovu cf. silu Katalinić, kako se vidi iz njegove kritike, ne prihvaća.

Evo odgovor na piščeve primjedbe o mojoj knjizi.

1. Katalinić ubraja moj prikaz gibanja u kružnici među one, gdje se »u zadacima izbjegava izračunavanje cf. sile«; pri tom on upućuje na dva zadatka moje knjige. U istinu sam cf. sili posvetio zaseban §, koji slijedi odmah iza § »Centripetalna sila«. Jedan od naznačenih zadataka tiče se cp. akceleracije na zemaljskom ekvatoru; ne znam, čemu bi tu služila cf. sila. Pri tumačenju cp. sile cf. je sila logički suvišna, te bez potrebe zamrsuje predmet. Ono, što se — kako pisac kaže — »psihološki nameće«, ne zaslužuje vazda obzira, i — ako treba — često se najbolje pobija šutnjom.

2. Pisac me s pravom spominje među onima, koji »objašnjavaju cf. silu kao posljedicu inercije«. Za takvo tumačenje savjest mi je dosta mirna. »Ima tu tek niansa izražavanja«, kaže Katalinić, premda dodaje, da jedna od knjiga ovdje spomenutih upliće u tumačenje kružnog gibanja »tangencijalnu silu«. Ne bih mogao priznati, da se takvo tumačenje samo za niansu razlikuje od drugih, u kojima nema te čudne sile.

3. »Kod Kučere i kod Hondla pitanje hvatišta cf. sile nije pobliže izraženo«. Doista nisam spomenuo hvatišta. U mojoj Fizici na pr. stoji, da uže, na kojemu je privezan utez, koji vitlam oko ruke, »nateže ruku«, a ruka nije točka, dok je hvatište točka; u ruci pri tom pokusu upravo osjećamo naprezanje na više mjesta. Mogu se uostalom pozvati na Boltzmanna, koji kaže, da »tvarna točka«, koja se giblje u kružnici, izvodi »cf. silu« »na tvarne točke [plural!], od kojih se mehanizam (*die*

Vorrichtung) sastoji« (Boltzmann, *Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik,* 1, 1897, str. 45.). Što je Boltzmann izrazio apstraktnije, u mene i tolikih drugih rečeno je konkretno. Pa i sam Newton kaže: *urget circulum.*

4. Pisac kaže, da se »Hondl i Sokolov« u izvodu cp. akceleracije služe »Hamiltonovom metodom hodografa«. To se ne može reći. Iz hodografa t. zv. jednolikog gibanja u kružnici vidimo neposredno, bez pisanja drugih formula, da je cp. akceleracija $v\omega$, t. j. *brzina* $\times$ *kutna brzina.** Moj put do te formule, kakogod je kratak, ipak obuhvaća nekoliko redaka (Fizika, na pr. I. izdanje, str. 58.). On vodi od brzine odmah na akceleraciju, a ne maglovitom stramputicom, gdje se sastavljaju neki fiktivni putovi. Pri tom se crta samo trokut brzina, a hodograf — razumije se — nije ni spomenut. Onako, kao ja, postupa i R. W. Pohl *(Einführung in die Mechanik, Akustik und Wärmelehre;* 1. izdanje 1930., str. 16.; 5. i 6. izdanje 1943., str. 14). Formula $v\omega$ je najjednostavnija, pa je i put do nje najkraći (i najprikladnija je pri tumačenju ciklotrona; v. 3. i 4. izdanje moje Fizike). Sokolov te formule nema.

Povodeći se za Newtonom možemo izraz $v\omega$ jednostavno interpretirati. Gibanje tvarne točke u kružnici može se u teoriji nadomjestiti gibanjem duž stranica pravilnog mnogokuta, koji je krugu upisan i ima mnogo stranica. Sila onda djeluje na točku samo u časovima, kada točka stigne na kraj stranice, pa se tamo na kružnici odbije i prijeđe u slijedeću stranicu. Ako se kod refleksije smjer brzine promijeni za α radijana, brzina v, vektorski uzeto, promijeni se za αv. Ako se u kratkom vremenu τ smjer brzine promijeni za $\omega\tau$, bit će broj refleksija u tom vremenu $\omega\tau : \alpha$. Ukupna promjena brzine u vremenu τ iznosit će dakle $\alpha v \cdot \omega\tau : \alpha = v\omega\tau$ i prema tomu je cp. akceleracija $v\omega$. Malenu veličinu α odaberimo sada u svima primjerima jednakom; drugim riječima, neka zamišljeni mnogokut u svima kružnicama ima jednak broj stranica. Onda je u izrazu $v\omega$ prvi faktor razmjeran promjeni brzine u jednoj refleksiji, a drugi je faktor razmjeran broju refleksija. — Dodajmo, da Newton kod toga gibanja u mnogokutu ne traži cp. akceleraciju, nego odmah cf. i cp. silu. Ona je po Newtonu »razmjerna brzini i broju refleksija«. I kako Newton ne uvodi kutnu brzinu, on dalje kaže, bez bližega obrazloženja, da je ona sila razmjerna putu prevaljenu u danom vremenu i omjeru toga puta i polumjera. No taj je omjer kutna brzina ($v : r = \omega$).

IZ MATEMATIČKO-FIZIČKOG ODSJEKA PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKOG FAKULTETA U ZAGREBU

Četiri nova doktora matematičkih nauka

Na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu su u godini 1953. iz matematičkih nauka doktorirali:

10.XII. Mato Brčić-Kostić, profesor gimnazije u Subotici;

11. XII. Mirko Stojaković, predavač Mašinskog fakuteta Visoke tehničke škole u Beogradu;

15. XII. Viktor Sedmak, asistent Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu;

---

*To slijedi iz poučka, da je akceleracija tvarne točke jednaka brzini korespondentne točke u hodografu. Metodom hodografa, ali bez primjene toga poučka, nalazi Mach, da je cp. akceleracija $2v\pi : T$. (E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung, 7. izdanje, 1912.)

22. XII. Pavle Papić, asistent Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu.

U sva četiri slučaja predsjednik ispitne komisije bio je prof. Dr. Ž. Marković, referent prof. Dr. Đ. Kurepa, a članovi prof. Dr. D. Blanuša i prof. Dr. S. Bilinski, dok je peti član komisije bio u prva dva slučaja prof. Dr. V. Vranić, a u posljednja dva slučaja prof. Dr. V. Niče.

Promocija novih doktora obavljena je 30. XII. 1953.

Donosimo ovdje kratke sadržaje obranjenih disertacija:

Dr. Mato Brčić-Kostić: Neodređene polinomne jednadžbe viših potencijâ oblika

$$\sum_{i=1}^{r} x_i^n = \sum_{j=1}^{s} y_j^n .$$

Totalnom indukcijom, a pomoću diferencijâ n-tog reda, izveden je i dokazan identitet:

$$[a + (2^{n-1} - 1) \cdot u]^n - [a + (2^{n-1} - 2) \cdot u]^n - [a + (2^{n-1} - 3) \cdot u]^n +$$
$$+ [a + (2^{n-1} - 4) \cdot u]^n - \ldots \mp [a + 3u]^n \pm [a + 2u]^n \pm [a + u]^n \mp a^n =$$
$$= n! \cdot 2^{\frac{n(n-3)}{2}} \cdot u^{n-1} \cdot [2a + (2^{n-1} - 1) u] ,$$

na temelju kojeg su dani opći identiteti kao rješenja naslovne jednadžbe za svaku prirodnu vrijednost $n \geq 2$ i za svaki odnos broja članova r i s na lijevoj i desnoj strani, ako je $r \geq 2^{n-2} + 1$ i $s \geq 2^{n-2}$. U izvodima i dokazima sadržano je kao specijalan slučaj i rješenje Tarry-evog problema, kada je $r = s = 2^n$, što je autor dao sa dva opća identiteta za tâki i lihi n. Specijalno za mnogostepene jednadžbe, gdje istodobno mora biti $n = 1$ i $n = 2$ (dvostepene jednadžbe), dao je autor gusti niz rješenja općim identitetima za svaku vrijednost $r \geq 3$ i $s \geq 1$. Do ovih identiteta za dvostepene jednadžbe autor je došao preko proširenja poznatog identiteta, koji rješava neodređenu jednadžbu $x_1y_1 + x_2y_2 = u \cdot v$, t. j. proširenjem ovoga na polinomni slučaj. Još gušći nizovi rješenja se dobiju za dvostepene jednadžbe preko identiteta, kojima su totalno riješene neodređene jednadžbe $\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = u \cdot v$ i $\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = u \cdot v$ — u skupu cijelih brojeva.

Dr. Mirko Stojaković: »Prilog teoriji matrica«

U ovom radu obrađuju se različite funkcije matričnih promenljivih s naročitim osvrtom na razlike između kvadratnih i nekvadratnih matričnih promenljivih. Pokazuje se da se determinante logično pojavljuju pri homomorfnom preslikavanju prstenova kvadratnih matrica određenog stupnja na telo skalara i to uz izvesnu restrikciju pri preslikavanju zbira matrica. Uslovi, iz kojih se determinante, kao skalarne funkcionele, izvode, razlikuju se od svih dosada upotrebljavanih uslova. Potpuno su adaptirani matričnom karakteru nezavisne promenljive i kao takvi podesniji su za upotrebu kako kod matrica konačnog tako i kod onih beskonačnog reda. Ove iste uslove ispunjavaju, uz izvesne modifikacije, i

nekvadratne matrice, za koje se definišu determinante i operatori tako, da se determinante kvadratnih matrica pojavljuju kao specijalan slučaj. Ovim je data nova osnova za aksiomatsku teoriju determinanata. Dobiveni rezultati primenjuju se na problem inverzije nekvadratnih matrica, gde se dokazuje nekoliko novih stavova (Laplace-ova teorema u najopštijem obliku, kvaziinverzne i kvazijedinične matrice) kao i na problem unutrašnjih i spoljašnjih proizvoda matrica, gde se također dobija niz novih stavova. Dobiveni stavovi omogućuju i nov način analize linearnih matričnih jednačina. Najzad ukazuje se na mogućnost proširivanja teorije matričnih funkcija kvadratne matrične promenljive na nekvadratne matrične promenljive.

Dr. Viktor Sedmak: »Neke primjene parcijalno uređenih skupova.«

Ova teza nastala je kao rezultat rješavanja problema da se odredi suprem skupa dimenzija djelomično uređenih skupova pridruženih trodimenzionalnim poliedrima, koji je postavio prof. Dr. Đ. Kurepa. Taj problem sadrži u sebi i vezu između topoloških i drugih nemetričkih svojstava poliedra P i djelomično uređenog skupa njegovih poliedarskih elemenata $([P]; \subseteq)$. Neki rezultati:

Ako se u definiciji dimenzije skupa d zamijeni riječ »minimum« sa »supremum«, dobivena veličina nije topološka invarijanta za nijedan poliedarski kompleks, a ipak nije metričko svojstvo određena poliedra.

Neka je skup $(S; \leq_s)$ predočen potpunim proširenim uređenjima p_i. Ako ma koji elemenat $a \,\varepsilon\, S$ u ma kojem od uređenja p_i stavimo ma gdje unutar intervala $(m_{a,\,p_i},\ a)$, onda dobivena uređenja također predočuju $(S; \leq_s)$. Pritom je $m_{a,p_i} \equiv (A/B)_{p_i}$, takav rez uređenja p_i, gdje je $x \,\varepsilon\, A$, onda i samo onda ako postoji

$$y \,\varepsilon \left\{ b \cup \left(\bigcap_b (b, \infty)_S \setminus [a, \infty)_{p_i} \right) \right\},\ b \,\varepsilon\, (-\infty, a)_S \supset v$$

tako da je $x <_{p_i} y$.

Analogni zaključak vrijedi i za interval $(a,\ n_{a,\,p_i})$.

Za krivulju k homeomorfnu jednom jednodimenzionalnom kompleksu postoji topološka invarijanta $d_s\, k$. Za tro- i više dimenzionalni poliedarski kompleks d_s nije topološka invarijanta. Za dvodimenzionalni poliedarski kompleks problem je otvoren i usko povezan sa dimenzijom d_s bilo kojeg Eulerovog poliedra.

Ne postoji direktna zavisnost između d_s i običnih topoloških svojstava. Tako na pr. postoji poliedar K ma koje unaprijed zadane karakteristike, za koji je $d_s K = 4$.

Rješenje problema prof. Kurepe glasi:

$$\sup_P d_s\, ([P];\ \subseteq) = \aleph_0$$

Isti supremum ima već i skup poliedara, koji odgovaraju elementarnoj predodžbi.

Za određivanje d_s nekog poliedra P dovoljno je promatrati samo odnos »vrh-ploha« $(v—p)$, uz izvjesna manja ograničenja. Još je važnije da je za to određivanje dovoljno promatrati odnos »vrh-vrh« $(v—v)$, te za $v \parallel_S p$, $p <_i v$ gdje je $<_i$ neko od potpunih uređenja, koja određuju $([P]; \subseteq)$.

Dr. Pavle Papić: »Pseudodistancijalni prostori«

U prvom se dijelu obrađuju prostori sa razvrstano-uređenom bazom okolina (prostori razreda (R)). Ispitivanja se nadovezuju na jedan raniji rad (Glasnik, T. 8. str. 30). Neki rezultati:

Ako je $D(O)$ razvrstano-uređena baza prostora R tako, da bilo koja druga razvrstano-uređena baza ima rang, koji nije manji od $\gamma D(O)$ onda $D(O)$ ili ima svega jedan sloj ili je $\gamma D(O)$ inicijalan redni broj.

Da prostor R bude razdaljinski, nužno je i dovoljno da posjeduje jednu razvrstano-uređenu bazu okolina $D_\omega(O)$, kojoj je rang najviše jednak ω. Svaki je razdaljinski prostor razreda R homeomorfan jednom uređenom prostoru. Svaki lokalno separabilan i svaki lokalno kompaktan prostor R je razdaljinski prostor.

Ako postoji prostor $T(F)$ (Đ. Kurepa, Publ. Math. Univ., V (1936), Beograd), koji nije razdaljinski, onda postoji i takav prostor T istog razreda, koji sadrži jedan striktno padajući dobro uređeni niz otvorenih skupova $G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_\xi \supset \ldots$ $(\xi < \omega_1)$ sa: $\bigcap_\xi G_\xi = v$ (prazno) i $\overline{G_\xi} = T$, $(\xi < \omega_1)$.

Zatim se promatraju Kurepa-Fréchet-ovi prostori; pokazano je da su oni među njima, koji nisu razdaljinski, specijalan slučaj prostora razreda (R). Provedena je i generalizacija nekih svojstava razdaljinskih prostora na takve prostore.

Na kraju se promatraju operatorni prostori $E(M)$ i $D(M)$ (Kurepa, Comptes rendus, 203 (1936), p. 1049); pokazano je da je odgovor na pitanje: Da li je uređen prostor (Ω) razreda $E(R_n)$ (Kurepa, loc. cit.), negativan.

IZ DRUŠTVA MATEMATIČARA I FIZIČARA N. R. HRVATSKE

ODRŽANI KOLOKVIJI

22) 7. X. 1953. *S. Ščavničar: Rentgenografsko ispitivanje živinog oksiklorida.*

Rentgenografskim putem ispitana je struktura živinog oksiklorida, koji se u literaturi navodi sa formulom $Hg \cdot 2HgCl_2$. Spoj kristalizira u kubičnoj tetartoedriji sa prostornom grupom T^4 —$P2_13$. Elementarna ćelija ima periode: $a_1 = a_2 = a_3 = 9{,}22$Å i sadrži 4 stehiometrijske jedinice Hg_3Cl_4O. Iz dvodimenzionalne Fourierove sinteze dobiveni su položaji svih atoma u elementarnoj ćeliji. Iz simetrije smještaja pojedinih atoma i iz dužina veze između atoma proizlazi, da je čitav kristal izgrađen iz tri-klor-merkurioksonium kationa, koji su međusobno povezani anionima klora. Prema tome pisanje formule spoja u obliku $[Hg_3Cl_3O]^+ \; Cl^-$ točnije odražava strukturu i prirodu spoja. Ovdje je po prvi puta određen razmak živa-kisik (2.03Å).

23.) 14. X. 1953. Stručno pedagoško veče:

Asist. E. Wagner: Demonstracija optičke klupe vlastite izrade.

24) 21. X. 1953. Kolokvij prigodom proslave 80-godišnjice profesora Dr. Stanka Hondla:
a) *Dr. ing. M. Paić: Prigodom proslave osamdesete godišnjice rođenja prof. Dr. S. Hondla,**
b) *Dr. V. Lopašić: Prilog određivanju medijane ravnine magnetskog polja ciklotrona metodom žičane petlje,*
c) *Dr. B. Metzger: O upotrebi tiratrona u amplitudnom diskriminatoru,*
d) *Ing. I. Strilić — ing. M. Sedlaček: Elektronska zaporna ura.*

25) 28. X. 1953. Veče slobodnih tema, saopćenja i razgovora:
a) *Dr. L. Randić: Konstrukcija vertikala nebeske sfere u stereografskoj projekciji,*
b) *Prof. L. Rajčić: O rotacionim stožastim plohama u geometriji Lobačevskoga,*
c) *Prof. S. Škreblin: Neke primjedbe o rješavanju iracionalnih jednadžbi.*

26) 4. XI. 1953. *Dr. S. Bilinski: Neke generalizacije Ptolomejevog teorema.*

Predavač je najprije ukratko izložio dosada poznate generalizacije Ptolomejevog teorema, a pri tom je dao i jedan novi dokaz Milne-Thomsonove relacije za udaljenosti $n+2$ točke na hipersferi n-dimenzionalnog prostora. Jedna daljnja generalizacija dana je slijedećim teoremom:

Ako je $A_1 A_2 \ldots A_n$ jednostavan konveksni tetivni poligon, pa je za udaljenost a_{ij} između točke A_i i točke A_j uzeto dogovorno da je $a_{ij} \gtreqless 0$ prema tome, da li je $i \lesseqgtr j$, tada matrica $M_n \equiv \| a_{ij} \|$ $(i, j = 1,2,\ldots, n)$ ima rang 2.

No vrijedi i slijedeći obrat ovog teorema:

Ako je moguće n danih točaka prostora bilo koje dimenzije numerirati tako, da matrica M_n ima rang 2, onda te točke leže na jednoj kružnici u cikličnom redosljedu izvedene numeracije.

27) 11. XI. 1953. Stručno pedagoško veče:
Prof. B. Pavlović: Suvremeno tretiranje pojma množenja u nastavi matematike.

28) 18. XI. 1953. *Dr. F. Mikić: Primjena tablica za određivanje trenda kod ekvidistantnih apscisa u sistemima linearnim, paraboličkim i logaritamskim.*

Nakon historijskog uvoda predavač daje primjere, na kojima se mogu primijeniti njegove tablice za određivanje trenda (prosjeci iz korelacija, pojedinačne ekvidistantne vrijednosti). Iza osnovnih općih jednadžbi za pravac, parabolu 2. reda, parabolu 3. reda i logaritamski sistem, navodi odgovarajuće normalne jednadžbe iz kojih se računaju potrebni koeficijenti. Predavač nadalje objašnjava primjenu svoje terminalne formule za računanje koeficijenata na temelju jednog primjera. Zatim uspoređuje interpolatorne vrijednosti i procjenjuje devijacije stohastičkih vrijednosti od suponiranih funkcionalnih. Na kraju predavač daje objašnjenje važnosti svojih tablica za brže i preciznije računanje trenda.

29) 25. XI. 1953. Veče slobodnih tema, saopćenja i razgovora:
a) *Asist. S. Mardešić: Poopćenje jednog teorema W. Sierpińskoga,*
b) *Prof. D. Mitrović: O koeficijentima Taylorovog reda funkcije* $[\zeta(s)]^{-1}$.

---

* Vidi ovo godište Glasnika No. 3 str. 228.

30) 2. XII. 1953. *Dr. L. Randić: Redukcija na srednju nit kod metode Pjevcova.*

Obično se kod metode Pjevcova povezuju opažanja dviju zvijezda na istim nitima. Umjesto toga može se svesti prolaze jedne zvijezde kroz pojedine niti na prolaz kroz srednju nit pomoću razmaka Δz među nitima. Pri redukciji treba uzeti i kvadratne članove. Tako se može dobiti ocjena unutarnje točnosti opažanja, a mogu se iskoristiti i ona opažanja, kod kojih obje zvijezde u paru nisu opažane na istim nitima. Svođenje na srednju nit može se izvesti pomoću srednje vrijednosti razmaka svih niti i njihovih kvadrata, koji se smatraju za određene konstante instrumenta. U slučaju opažanja obje zvijezde u paru na istim nitima može se izvesti redukcija na fiktivnu srednju nit definiranu uvjetom $\sum_{i=1}^{n} \Delta z_i = 0$ (n je broj niti), tako da se aritmetička sredina svih trenutaka prolaza popravi samo za kvadratni član Δz^2 (vrlo malen), što znatno ubrzava redukciju, odnosno dozvoljava upotrebu kontaktnog mikrometra pri opažanju i znatno povećanje broja trenutaka prolaza.

31) 9. XII. 1953. Stručno pedagoško veče:
Prof. M. Krajnović: Prikazivanje matematičkih nastavnih filmova »Pitagorin poučak« i »Geometrijska mjesta u ravnini« uz komentar.

32) 16. XII. 1953. *Dr. ing. D. Bazjanec: Suvremena avijacija i »zvučna barijera«*

Iznesen je pregled naglog napretka aeronautičke tehnike u toku posljednjeg decenija uz kratak izvještaj o novim tipovima aviona, koji su prikazani na smotri britanskog zrakoplovstva u Farnboroughu u rujnu 1953. godine. Opisan je fizički aspekt pojava, koje nastaju pri prijelazu »zvučne barijere«, u koliko su one do sada poznate teorijski i na temelju eksperimentalnih ispitivanja u nadzvučnim aerodinamičkim tunelima kao i najnovijih iskustava stečenih pri lijetu aviona. Izloženi su efekti »zvučne barijere« na avion, t. j. nagli porast otpora uzduha uslijed pojave udarnog vala, promjena uzgona krila i pomak hvatišta aerodinamičkih sila, a prikazana su i nastojanja, da se ti efekti svedu na minimum. Predavač je na kraju objasnio i akustične efekte (»sonic bangs«) pri postizavanju nadzvučnih brzina.

33) 23. XII. 1953. *Ing. D. Palman: O plohama 3. reda s 4 dvostruke točke, izvedenim pomoću kubne inverzije*

Kubna inverzija je takva prostorna transformacija, u kojoj su pridružene točke konjugirane s obzirom na neku plohu Ψ 2. reda, a ujedno leže na zrakama neke linearne kongruencije H. Nekoj ravnini Φ odgovara u takvoj inverziji opća ploha Φ_ψ^3 3. reda. Ako su ravnalice linearne kongruencije H konjugirane polare plohe Ψ, tada je ploha Φ_ψ^3, koja odgovara nekoj ravnini Φ, ploha 3. reda s 4 dvostruke točke.

Pomoću takve prostorne transformacije dobivene plohe Φ_ψ^3 s 4 dvostruke točke, podijeljene su na 7 vrsta, s obzirom na realnost njihovih dvostrukih točaka i pravaca. Dalje su izvedena neka svojstva takvih ploha, koje prolaze apsolutnom čunjosječnicom, zatim i takve, koje imaju dvije dvostruke točke na apsolutnoj čunjosječnici. Vrste takvih ploha razmatrane su i s obzirom na njihovu neizmjerno daleku krivulju.

34) 30. XII. 1953. Veče slobodnih tema, saopćenja i razgovora:

a) *Dr. M. Hercigonja: Fermatov poučak o poligonalnim sljedovima,*
b) *Asist. Č. Stanojević, k. g.: 1) Jedno saopćenje adicione i multiplikacione teoreme u teoriji vjerojatnosti; 2) Jedno saopćenje Cauchyevog stavka,*
c) *Dr. M. Stojaković, k. g.: Jedan način rješavanja linearnih matričnih jednadžbi.*

PUBLIKACIJE, KOJE JE DRUŠTVO PRIMILO U ZAMJENU ZA GLASNIK U 1953. GODINI

Argentina

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina, Buenos Aires,
Boletin Mensual, Observatorio de Física Cosmica de san Miguel,
Contribuciones Cientificas, Serie A, Facultad de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales, Buenos Aires,
Mathematicae Notae, Boletín del Instituto de Matemática, Rosario,
Publicaciones de la Comisíon Nacional de la Energía Atómica, Buenos Aires,
Revista, Serie A, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologia, Tucuman,
Revista, Serie segunda, Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas, Eva Peron.

Australija

Australian Journal of Physics, Melbourne,
Journal and Proceedings of the Royal Society of New South Wales, Sydney.

Austrija

Anzeiger, Österreichische Akademie der Wissenschaften, Math.—naturw. Klasse, Wien,
Internationale Mathematische Nachrichten, Wien,
Siemens Austria Technische Berichte, Wien,
Statistische Vierteljahresschrift, Wien.

Belgija

Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Bruxelles,
Bulletin de la classe des Sciences, Académie Royale de Belgique,
Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liége, Liége,
Mathesis, Mons,
Mededelingen van de Koninklijke Vlaamse Academie voor Wetenschappen, Letteren en Schone Kunsten van België, Brussel,
Simon Stevin, Wis. en Natuurkundig Tijdschrift, Gent.

Brazilija

Anais da Academia Brasileira de Ciencias, Rio de Janeiro,
Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo, São Paulo,
Summa Brasiliensis Mathematicae, Rio de Janeiro.

Čehoslovačka

Czechoslovak Journal of Physics, Prag,
Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, Prag.

Čile

Scientia. Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso.

Danska

Acta Mathematica, Kopenhagen,
Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, Kopenhagen,
Matematisk Tidsskrift. Kopenhagen,
Mathematica Scandinavica, Kopenhagen.

Egipat

Proceedings of the Egyptian Academy of Sciences, Cairo,
Proceedings of the Mathematical and Physical Society of Egypt, Cairo.

Engleska

Atomic Scientists Journal, London,
Books of the Month, London,
Jodrell Bank Annals, Manchester,
Journal of the British Interplanetary Society, London,
Journal of the Institute of Actuaries, Cambridge,
The Mathematical Gazette, London,
Proceedings of the Royal Institution of Great Britain, London,
Technique, a journal of instrument engineering, Beckenham.

Finska

Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A, Helsinki,
Annales Universitatis Turkuensis, Turku,
Commentationes Physico-mathematicae, Societas Scientiarum Fennica, Helsinki.

Francuska

Annales de l' Institut de Physique du Globe, Paris,
Annales de l' Institut Fourier, Grenoble,
Annales de l' Institut Henri Poincaré, Paris,
Annales de l' Université de Lyon, Lyon,
Annales de Radioélectricité, Paris,
Annales Françaises de Chronométrie, Besançon,
Annuaire, Publié par le Bureau des Longitudes, Paris,
Bulletin Analytique du C. N. R. S. (Extraits), Paris,
Bulletin de la Société Mathématique de France, Paris,
Bulletin de la Société Scientifique de Bretagne, Rennes,
Bulletin de l' Institut International du Froid, Paris,
Bulletin géodésique, Association Internationale de Géodésie, Paris,
Cahiers Rhodaniens, Université de Lyon, Lyon,
Centre de Recherches Scientifiques, Industrielles et Maritimes, C. N. R. S. Marseille,
Contributions de l' Institut d' Astrophysique de Paris, Paris,
Institut de Mathématique, Université de Strasbourg, Strasbourg,
Institut de Physique, Université de Strasbourg, Strasbourg,
Le Journal de Physique et le Radium, Paris,
Journal des Recherches du C. N. R. S., Laboratoire de Bellevue, Paris,
Journal de la Société de statistique de Paris, Paris,
Laboratoire de Recherches Physiques sur les rayons X, Paris,
Revue d' Électricité et de Mécanique, Paris,
Revue d' Optique, Paris,
Travaux et mémoires du Bureau international des poids et mesures, Paris.

Grčka

Deltion, Bulletin de la Société Mathématique de Grèce, Athénes,
Praktika, Athénes.

Holandija

Electronic-Application Bulletin, Eindhoven,
Indagationes Mathematicae, Amsterdam,
Philips Technical Review, Eindhoven,
Physica, Amsterdam,
Verhandelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Afd. Natuurkunde, Amsterdam.

Indija

Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, Calcutta,
Indian Journal of Meteorology and Geophysics, New Delhi,
Indian Journal of Physics and Proceedings of the Indian Association for the Cultivation of Science, Jadavpur,

The Journal of the Indian Mathematical Society, Bombay,
Journal of Scientific and Industrial Research, New Delhi,
Journal of the University of Bombay, Bombay,
Journal of the University of Gauhati, Assam,
The Mathematics Student, Madras,
Proceedings of the Indian Academy of Sciences, Bangalore,
Proceedings of the National Institute of Sciences of India, New Delhi,
Sankhyā. The Indian Journal of Statistics, Calcutta.

Irska

Proceedings of the Royal Irish Academy, Dublin,
The Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society, Dublin.

Italija

Annali de Geofisica, Roma,
Annali dell' Università di Ferrara, Ferrara,
Atti dell' Accademia delle Scienze di Ferrara, Ferrara,
Atti dell' Accademia Nazionale dei Lincei, Roma,
Atti del Seminario Matematico e Fisico dell' Università di Modena, Modena,
Atti dell' Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Venezia,
Atti dell' Accademia Ligure di Scienze e Lettere, Genova,
Bollettino dell' Unione Matematica Italiana, Bologna,
Giornale di Matematiche di Battaglini, Napoli,
Le Matematiche, Catania,
Il Nuovo Cimento, Bologna,
Pubblicazioni dell' Istituto per le Applicazioni del Calcolo, Roma,
Relazione Semestrale, Istituto di Fisica dell' Università, Roma,
Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Palermo,
Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze, Cagliari,
Rendiconti del Seminario Matematico, Torino,
Rendiconti del Seminario Matematico dell' Università di Padova, Padova,
Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, Roma,
Rendiconto dell' Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche, Napoli,
La Ricerca, Rivista di Matematiche Pure ed Applicate, Napoli,
Ricerche di Matematica, Napoli,
La Ricerca Scientifica, Roma,
Rivista di Matematica della Università di Parma, Parma,
»Scientia« Rivista internazionale di sintesi scientifica.

Japan

Abstracts from Kagaku-kenkyū-jo Hōkoku (Reports of the Scientific Research Institute), Tokyo,
Annals of the Tokyo Astronomical Observatory University of Tokyo, Tokyo,
Bulletin of the Kobayasi Institute of Physical Research, Tokyo,
Bulletin of Mathematical Statistics, Kyushu,
Bulletin of Solar Phenomena, Tokyo Astronomical Observatory, Tokyo,
Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli, Tokyo,
Contributions from the Department of Physics, Faculty of Science University of Tokyo, Tokyo,
The Geophysical Magazine, Tokyo,
Journal of the Faculty of Science Hokkaido University, Sapporo,
Journal of the Institute of Polytechnics Osaka City University, Osaka,
Journal of the Mathematical Society of Japan, Tokyo,
Journal of the Physical Society of Japan, Tokyo,
Journal of the Scientific Research Institute, Tokyo,
Kōdai Mathematical Seminar Reports, Tokyo,
Mathematical Journal of Okayama University, Okayama,
Memoirs of the College of Sciences University of Kyoto, Kyoto,

Nagoya Mathematical Journal, Nagoya,
Osaka Mathematical Journal, Osaka,
Proceedings of the Japan Academy, Tokyo,
Progress of Theoretical Physics, Kyoto,
Publications of the Astronomical Society of Japan, Tokyo,
Tensor, Sapporo,
Tôhoku Mathematical Journal, Sendai,
Tokyo Astronomical Bulletin, Tokyo,
The Yokohama Mathematical Journal, Yokohama.

Jugoslavija

Bilten na Društvoto na matematičarite i fizičarite od NR Makedonija, Skopje,
Bulletin de l'Observatoire Astronomique de Beograd, Académie Serbe des Sciences, Beograd,
Bulletin Scientifique, Conseil des Académies de la RPF Yougoslavie,
Geodetski list, Zagreb,
Godišen zbornik, Filozofski fakultet na univerzitetot, Skopje,
Gozdarski vestnik, Ljubljana,
Matematičko fizički list, Zagreb,
Nastava matematike i fizike u srednjoj školi, Beograd,
Obzornik za matematiko in fiziko, Ljubljana,
Publications de l' Institut mathématique, Académie Serbe des Sciences, Beograd,
Rad, Jugoslavenska Akademija znanosti i umjetnosti, Zagreb,
Radovi — Geofizički institut, Zagreb,
Razprave, Akademija znanosti in umetnosti v Ljubljani, Ljubljana,
Recueil de Travaux de l'Institut de Recherches sur la Structure de la Matière (Institut za strukturu materije, Vinča), Beograd,
Statistička Revija, Beograd,
Vesnik Društva matematičara i fizičara NR Srbije, Beograd,
Zbornik Radova, Srpska Akademija nauka, Beograd.

Južna Afrika

South African Journal of Science, Johannesburg.

Kanada

Annales de l' ACFAS, Montreal,
Canadian Journal of Mathematics, Toronto,
Canadian Journal of Physics, Ottawa,
Contributions from the Dominion Observatory Ottawa, Ottawa,

Kolumbija

Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Bogota.

Kuba

Revista de la Sociedad Cubana de Ciencias Físicas y Matemáticas, Habana.

Luksemburg

Archives, Institut Grand-Ducal de Luxembourg, Luxembourg.

Meksiko

Boletín del Centro de Documentación Científica y Técnica, México,
Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, México,
Ciencia, México,
Revista Mexicana de Física, México.

Njemačka

Abhandlungen der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse, Akademie der Wissenschaften und der Literatur, Mainz,
Abhandlungen des Meteorologischen und Hydrologischen Dienstes der Deutschen demokratischen Republik, Berlin,
Akademie der Wissenschaften, Göttingen,
Archimedes, Erlangen,
Astronomischer Jahresbericht, Berlin,
Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Berlin,
Deutsche Geodätische Kommission (bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften), München,
Jahrbuch, Akademie der Wissenschaften und der Literatur, Wiesbaden,
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung. Tübingen,
Jahresbericht des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M.,
Mathematisch-physikalische Semesterberichte, Göttingen,
Mitteilungen aus dem Mathem. Seminar Giessen, Giessen,
Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Göttingen,
Physikalische Blätter, Karlsruhe,
Physikalische Verhandlungen, Mosbach-Baden,
Sitzungsberichte der math.-naturw. Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München, München,
Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaften zu Marburg, Marburg,
Sitzungsberichte der Physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen, Erlangen,
Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Badel,
Veröffentlichungen der Meteorologischen und Hydrologischen Dienstes der Deutschen Demokratischen Republik, Berlin,
Veröffentlichungen des Instituts für Erdmessung, Bamberg,
Zeitschrift für Physik (Deutsche Forschungsgemeinschaft), Göttingen.

Norveška

Astrophysica Norvegica, Oslo,
Institute for Weather and Climate Research, Blindern-Oslo,
Nordisk Matematisk Tidskrift, Oslo,
Det Norske Videnskaps-Akademi, Oslo.

Poljska

Annales de la Société Polonaise de Mathématique, Krakow,
Annales Universitatis Mariae-Curie-Sklodowska, Lublin,
Bulletin international de l' Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Cracovie,
Colloquium Mathematicum, Wroclaw,
Comptes rendus mensuels des séances, Cracovie,
Fundamenta Mathematicae, Warszawa,
Studia Mathematica, Wroclaw.

Portugal

Gazeta de Matemática, Lisboa,
Portugaliae Mathematica, Lisboa,
Portugaliae Physica, Lisboa,
Revista da Faculdade de Ciências, Lisboa.

Saar

Annales Universitatis Saraviensis, Saarbrücken.

S. A. D.

The American Mathematical Monthly, Menasha, Washington,
Annals of Mathematics, Princenton N, J.,
Applied Spectroscopy, New York,

Bulletin of the Chicago Academy of Sciences, Chicago,
The Bulletin of Mathematical Biophysics, Chicago,
Bulletin of the University of Minnesota, Minneapolis,
Columbia University Bulletin of Information, New York,
Duke Mathematical Journal, Durham,
Engineering and Science, Pasadena,
Journal of the Franklin Institute, Lancaster, Philadelphia,
Journal of Mathematics and Physics, Cambridge,
The Journal of Physical Chemistry, Washington,
Journal of Rational Mechanics and Analysis, Bloomington,
Journal of Research of the National Bureau of Standards, Washington,
The Journal of the Rutgers University Library, New Brunswick, New Jersey,
Journal of Science. The Iowa State College Press, Iowa,
Mathematical Review, Providence,
The Mathematics Teacher, Washington,
Natural History Miscellanea, Chicago,
Pacific Journal of Mathematics, Los Angeles,
Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, Boston,
Publications of the Astronomical Observatory University of Minnesota,
Quarterly of Applied Mathematics, Providence,
Scripta Mathematica, New York,
United States Naval Institut, Proceedings for the advancement of professional, literary and scientific knowledge in the Navy, Annapolis,
University of California, Publications in Statistics, Berkeley and Los Angeles,
University of Minnesota, Institute of Technology,
University of the State of New York Bulletin, Albany,
University of Washington Publications in Mathematics, Seattle.

Španija

Acta Salmanticensia, Salamanca,
Revista Matemática Hispano-Americana, Madrid.

Švedska

Arkiv för Astronomi, Stockholm,
Arkiv för Fysik, Stockholm,
Arkiv för Geofysik, Stockholm,
Arkiv för Matematik, Stockholm,
Elementa, Stockholm,
Transactions of Chalmers University of Technology, Gothenburg.

Švicarska

Archives des Sciences, Genève,
Elemente der Mathematik, Basel,
L' Enseignement mathématique, Genève,
Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, Basel,
Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschafte in Zürich, Zürich.

S. T. Trst

Annali Triestini, Trst.

Turska

Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul, Istanbul.

Urugvaj

Boletín de la Facultad de Ingeniería de Montevideo, Montevideo.

Venezuela

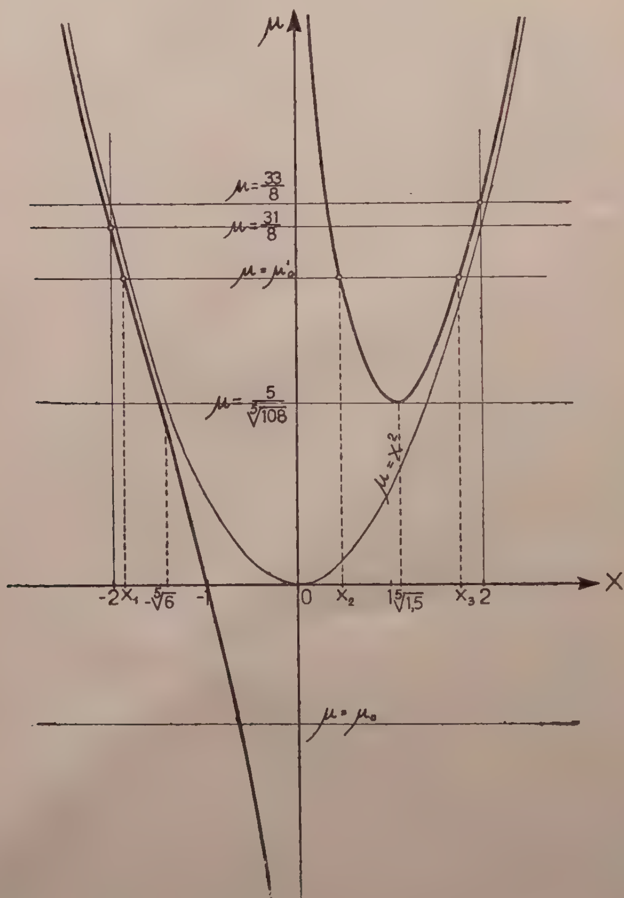
Boletín de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, Caracas.

RJEŠENJA ZADATAKA 172, 173, 174*

172. Za koje vrijednosti parametra μ ima jednadžba $x^5 - \mu x^3 + 1 = 0$ korijene između (-2) i $(+2)$? Neka se zadatak riješi i grafički.

Zadatak s rješenjem dostavio S. Škreblin. Rješenja su poslali: D. Ugrin-Šparac, Zagreb i T. Leko, Beograd.

Dajemo ovdje rješenje S. Škreblina:



Primijenit ćemo Sturmov poučak, pa najprije nalazimo ove Sturmove funkcije: $x^5 - \mu x^3 + 1$; $5x^4 - 3\mu x^2$; $2\mu x^3 - 5$; $6\mu^3 x^2 - 25\mu x$; $-625\mu x + 90\mu^4$; $-90\mu^4\ (108\mu^5 - 5^5)$.

Za $x = -2$ one su redom jednake:

$-31 + 8\mu$; $80 - 12\mu$; $-16\mu - 5$; $24\mu^3 + 50\mu$;
$1250\mu + 90\mu^4$; $-90\mu^4\ (108\mu^5 - 5^5)$,

dok za $x = 2$ dobivamo:

$33 - 8\mu$; $80 - 12\mu$; $16\mu - 5$; $24\mu^3 - 50\mu$;
$-1250\mu + 90\mu^4$; $-90\mu^4\ (108\mu^5 - 5^5)$.

Karakteristične vrijednosti od μ jesu ove:

$$\frac{-5}{\sqrt[3]{9}};\ \frac{-5}{\sqrt{12}};\ \frac{-5}{16};\ 0;\ \frac{5}{16};\ \frac{5}{\sqrt{12}};\ \frac{5}{\sqrt[5]{108}};\ \frac{5}{\sqrt[3]{9}};\ \frac{31}{8};\ \frac{33}{8};\ 6\frac{2}{3}.$$

Sada treba načiniti tablicu, gdje ćemo za intervale, što ih određuju te karakteristične vrijednosti, unijeti predznak svake od Sturmovih funkcija; u istom retku gore bit će za određene vrijednosti od μ predznaci Sturmovih funkcija za $x = -2$, a dolje predznaci tih funkcija za $x = 2$. Tako ćemo lako pobrojati broj varijacija gornjeg i donjeg retka, odrediti gubitak broja varijacija u svakom intervalu, pa tako saznati broj realnih korijena između (—2) i (+2). Na taj način nalazimo da u tom intervalu postoji:

za $-\infty < \mu < \dfrac{5}{\sqrt[5]{108}}$ samo jedan korijen;

za $\dfrac{5}{\sqrt[5]{108}} < \mu < \dfrac{31}{8}$ tri korijena;

za $\dfrac{31}{8} < \mu < \dfrac{33}{8}$ dva korijena;

za $\dfrac{33}{8} < \mu < +\infty$ opet samo jedan korijen.

Da rezultat grafički objasnimo, pišimo danu jednadžbu u obliku $\mu = x^2 + x^{-3}$, pa je grafički predočimo u koordinatnom sistemu x, μ. Odredimo ekstremne vrijednosti od μ i točku infleksije, pa ako još uočimo da je ovdje parabola $\mu = x^2$ asimptotska krivulja, tada razabiremo, da naša krivulja ima tok kao na priloženoj slici.

Svakoj paraleli s osi x odgovara određena vrijednost od μ. Apscise sjecišta tih paralela s krivuljom daju korijene za pripadnu vrijednost od μ. Iz slike neposredno razabiremo, kad ti korijeni leže između (—2) i (+2) i koliko ih ima, pa nam ona očigledno potvrđuje rezultate prvog ispitivanja.

T. Leko je došao do istog rezultata razmatrajući krivulje $y_1 = x^5 + 1$, $y_2 = \mu x^3$ stavivši $y_1 = y_2$, $y'_1 = y'_2$.

D. Ugrin-Šparac ispituje, koji uvjeti moraju biti ispunjeni, da je (+2) gornja granica pozitivnih korijena i (—2) donja granica negativnih korijena. On je nacrtao sliku poput ovdje nacrtane, iz koje se može neposredno razabrati broj korijena između (—2) i (+2).

173. Zadane su dvije konjugirano-imaginarne točke na pravcu p kao dvostruke točke eliptičke involucije. Treba konstruirati:

a) realnu kružnicu, koja prolazi tim dvjema točkama i kojoj je zadan realni polumjer r;

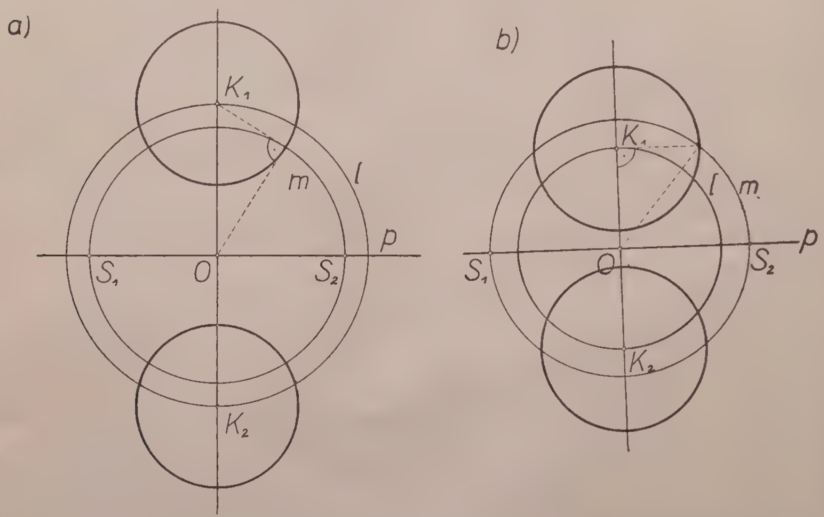
b) središte imaginarne kružnice, koja prolazi tim dvjema točkama i kojoj je zadan dijametar imaginarnom dužinom id. Ta dužina definirana je udaljenošću između dvostrukih točaka eliptičke involucije na nekom pravcu q.

Zadatak s rješenjem dostavio D. Palman. Rješenja su poslali T. Leko, Beograd i Lj. Dočkal, Zagreb.

Dajemo ovdje rješenje Ljerke Dočkal:

Ako realna kružnica $k\ (r)$, odnosno imaginarna kružnica $k'\ (ri)$ prolazi dvostrukim točkama eliptičke involucije na pravcu p, onda je involucija konjugiranih točaka, koju ta kružnica određuje na pravcu p kongruentna sa zadanom involucijom.

Eliptičku involuciju na pravcu p zadat ćemo parom simetričnih točaka S_1, S_2. Prema gornjem to je ujedno par simetričnih točaka involucije konjugiranih točaka, koju kružnica k (r), odnosno $k'(ri)$ određuje na pravcu p. Radi simetrije će središte tražene kružnice biti na simetrali dužine S_1 S_2.



a) Poznato je da svaka kružnica opisana nad parom konjugiranih točaka, koje realna kružnica $k(r)$ određuje na pravcu p, siječe kružnicu $k(r)$ ortogonalno. Prema tome kružnica $m(m)$ opisana nad promjerom S_1 S_2 siječe kružnicu $k(r)$ ortogonalno. Središta svih kružnica radiusa r, koje kružnica $m(m)$ siječe ortogonalno, leže na kružnici l (radius $l^2 = m^2 + r^2$). Sjecišta kružnice $l(l)$ sa simetralom dužine S_1 S_2 su rješenja zadatka a).

b) Umjesto involucije konjugiranih točaka, koju imaginarna kružnica $k'(di$ odnosno $ri)$ određuje na pravcu p, promatrat ćemo njoj identičnu involuciju antikonjugiranih točaka, koju realna kružnica $k(r)$ određuje na pravcu p.

Poznato je da svaka kružnica opisana nad parom antikonjugiranih točaka, koje realna kružnica $k(r)$ određuje na pravcu p, siječe kružnicu k (r) u dijametralno suprotnim točkama. Središta svih kružnica radiusa r, koje kružnica $m(m)$ siječe u dijametralno suprotnim točkama, leže na kružnici l (*radius*: $l^2 = m^2 - r^2$). Sjecišta kružnice $l(l)$ sa simetralom dužine S_1 S_2 su rješenja zadatka b). Ako je $r \leq m$, dobijemo dvije, odnosno jednu kružnicu s realnim središtem, a za $r > m$ dobijemo dvije kružnice s konjugirano-imaginarnim središtima.

174.* Neka se iz sistema

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2a \tag{1}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2b \tag{2}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha - \operatorname{cosec} \beta = 2c \tag{3}$$

eliminira α i β i tako odredi odnos između veličina a, b i c.

Zadatak s rješenjem dostavio je V. Jirasek, Zagreb. Ispravna rješenja su poslali: Z. Blašković, Zagreb; I. Matulić, Osijek i B. Pavković, Zagreb.

Podijelivši (1) sa (3) dobiva se

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{a}{c}. \tag{4}$$

Kvadriranjem i zbrajanjem jednadžbi (1) i (2) izlazi

$$2 - 2\sin\alpha\sin\beta - 2\cos\alpha\cos\beta = 4(a^2 + b^2),$$

a odatle je uvaživši (4)

$$\cos\alpha\cos\beta = 1 + \frac{a}{c} - 2(a^2 + b^2). \tag{5}$$

Odbijajući (4) od (5) dobiva se

$$\cos(\alpha+\beta) = 1 + 2\frac{a}{c} - 2(a^2 + b^2). \tag{6}$$

No (1) i (2) mogu se pisati:

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = a,$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = -b,$$

a odatle dijeljenjem izlazi

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{b}{a}. \tag{7}$$

No, jer je

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1-\cos(\alpha+\beta)}{1+\cos(\alpha+\beta)},$$

to uvaživši ovdje (6) i (7) imamo:

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{-2\frac{a}{c} + 2(a^2+b^2)}{2 + 2\frac{a}{c} - 2(a^2+b^2)},$$

odakle sređivanjem dobivamo traženi odnos:

$$(a^2+b^2)^2 - \frac{a}{c}(a^2+b^2) - b^2 = 0.$$

ZADACI

180. Ako je T bilo koja točka unutar konike k, neka se konstruiraju središta koniki upisanih kružnica, koje prolaze točkom T i dirališta tih kružnica sa konikom k.

(Dostavio L. Rajčić)

181. Neka se konstruira grupa G od kontinuirano beskonačno mnogo elemenata tako, da za svaku konačnu grupu G_k postoji podgrupa G_k' grupe G izomorfna grupi G_k.

(Dostavio V. Devidé)

182. Neka se dokaže algebarski identitet

$$(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 2n\left\{\sum_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{n} x_i x_k + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k(k+1)}\left(k x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2\right\},$$

gdje je n prirodni broj veći od 1, a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ su bilo kakvi brojevi.

(Dostavio D. Blanuša)

SADRŽAJ - СОДЕРЖАНИЕ
TABLES DES MATIERES - CONTENTS

ČLANCI - СТАТЬІ - ARTICLES

M. Bajraktarević:	Neki specijalni slučajevi prvog proširenog stava o srednjim vrijednostima	115
	Sur quelques cas spéciaux du théorème généralisé de la moyenne	127
M. Bajraktarević:	O rješenjima jedne funkcionalne jednačine . . .	297
	Sur les solutions d'une équation fonctionnelle .	300
B. Berkeš:	Fouriersche Reihen und Laplacesche Transformation	196
	Fourierovi redovi i Laplaceova transformacija .	212
D. Blanuša:	Les espaces elliptiques plongés isométriquement dans des espaces euclidiens 3,	81
	Eliptički prostori izometrički smješteni u euklidskim prostorima 22,	112
R. Cesarec:	O jednadžbi incidencije točke i pravca u projektivnim nezdruženim koordinatama	168
	Über die Inzidenzgleichung in nichtzusammengehörigen projektiven Koordinaten	173
V. Devidé:	Jedan teorem o homotetičkim hiperelipsoidima u n-dimenzionalnom prostoru	194
	Ein Satz über homothetische Hyperellipsoide im n-dimensionalen Raume	195
V. Devidé:	Über ein Modell der euklidischen Geometrie . .	246
	O jednom modelu euklidske geometrije	246
A. Grossmann	Sur une propriété des ensembles ordonnés . . .	24
	O jednom svojtsvu uređenih skupova	26
S. Hondl:	Über das mit Wasser gefüllte Fernrohr nach Boscovich	49
B. Jakšić:	Selection rules for meson decays into two bosons imposed by the conservation of angular momentum and parity (Preliminary note)	149
Z. Janković:	On recurrence formulae for Bessel functions .	161
	O rekurentnim formulama za Besselove funkcije	166
Z. Janković:	On solutions of Hermite's and Laguerre's differential equation	133
	O rješenjima Hermiteove i Laguerreove diferencijalne jednadžbe	146
Z. Janković:	Two recurrence formulae for the sums s_{2k} . .	27
	Dvije rekurentne formule za zbrojeve s_{2k} . . .	29
G. Kurepa:	Real and ordinal numbers as sets of rational numbers	270
	Realni i redni brojevi definirani kao skupovi racionalnih brojeva	278

S. Kurepa:	Peanova preslikavanja i Suslinov problem . . .	175
	Peano's Transformations and Suslin's Problem .	189
J. Lončar:	On some possibilities in electrical vacuum metering	52
	O nekim mogućnostima električnih mjerenja vakuuma	53
S. Mardešić:	Über die Unabhängigkeit mod (G) der ganzzahligen Linearformen	280
	O nezavisnosti mod (G) cjelobrojnih linearnih formi	290
D. Mitrović:	O Dirichletovom integralu	44
	Une remarque sur l'intégrale de Dirichlet . . .	46
A. Moessner:	Drei Diophantische Probleme	191
	Tri diofantska problema	193
A. Moessner:	Einige zahlentheoretische Untersuchungen und Resultate	129
	Neka istraživanja i rezultati iz teorije brojeva .	132
V. Niče:	Über die isotropen Strahlenpaare 2. Art der Strahlenkongruenzen I. Ordnung 3., 2. und 1. Klasse	293
	O izotropnim zrakama 2. vrste u kongruencijama I. reda 3., 2. i 1. razreda	295
P. Papić:	O prostorima sa razvrstano uređenom bazom okolina	30
	Sur les espaces admettant une base ramifiée de voisinages	41
D. Pejnović B. Marković:	Utjecaj Zeemanova efekta na apsorpciju svjetlosti	213
	Über den Einfluss des Zeemaneffekts auf die Absorption des Lichtes	224
S. Raljević:	O jednoj generalizaciji Eulerovog pravca i Eulerove dužine	47
	Sur une généralisation de la droite et du segment d'Euler	48
R. Vernić:	Periodische Lösungen im Dreikörperproblem . .	247
	Periodična rješenja problema triju tijela	265
V. S. Vrkljan:	Prilog Darwinovu izvođenju magnetičkoga momenta elektrona i pozitrona	267
	Beitrag zur Darwinschen Ableitung des magnetischen Moments des Elektrons und des Positrons .	269

RAZNO - РАЗНОЕ - DIVERS - MISCELLANY

V. Andrejev:	P. S. Dwyer, Linear computations	65
I. Babić-Gjalski:	J. M. Blatt-V. F. Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics. New York 1952	153
D. Blanuša:	Razvoj fizičke misli u našem stoljeću	54
D. Blanuša:	T. P. Anđelić, Tenzorski račun, Beograd 1952 .	151
V. Glaser:	Ivo Babić-Gjalski (16. II. 1927. — 18. V. 1953.) . .	150
S. Hondl:	Osvrt na jednu raspravu M. Katalinića	301
Z. Janković:	I. Supek, Teorijska fizika i struktura materije .	62
J. Justinijanović:	V. Niče, Deskriptivna geometrija	64
J. Justinijanović:	V. Niče, Perspektiva	232
Đ. Kurepa:	Ž. Marković, Uvod u višu analizu	60

J. Lončar: Uz desetgodišnjicu smrti Nikole Tesle 57
On the occasion of the tenth anniversary of the death of Nicola Tesla 59

M. Paić: Prigodom proslave osamdesete godišnjice rođenja prof. dr. Stanka Hondla 228

IZ DRUŠTVA MATEMATIČARA I FIZIČARA N. R. H.
SOCIÉTÉ DE MATHÉMATICIENS ET PHYSICIENS DE CROATIE

Održani kolokviji 66, 154, 305
Sastanci podružnice Rijeka u 1952 god. 75
Sastanci podružnice Split u 1952 god. 75
IV redovna godišnja skupština Društva 68
Izvadak iz izvještaja tajnika na IV. redovnoj godišnjoj skupštini 70
IV. Plenum Saveza Društava 69
II. Kongres matematičara i fizičara FNRJ 73, 156, 233
II. Jugoslavenski kongres teorijske i primijenjene mehanike 74
Internacionalni kongres matematičara 1954 . . 74
Konferencija o fizici analize veličine čestica . . 236
Publikacije, koje je Društvo primilo u zamjenu za Glasnik u 1953 god. 308

IZ MATEMATIČKO-FIZIČKOG ODSJEKA PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKOG FAKULTETA U ZAGREBU

Četiri nova doktora matematičkih nauka . . . 302
Gostovanja i predavanja 236

ZADACI - ЗАДАЧЫ - EXERCISES ET PROBLÈMES

171*, 172 ,173 80
174*, 175, 176 160
177, 178, 179 240
180, 181, 182 317

RJEŠENJA - РЕШЕНИЯ - SOLUTIONS

159, (p. 76), 161 (p.76), 163 (p. 76), 164 (p. 157), 165* (p. 76), 166 (p. 157), 167 (p. 157), 168* (p. 157), 169 (p. 237), 170 (p. 327), 171* (p. 237), 172 (p. 314). 173 (p. 314), 174* (p. 314).

Prière de bien vouloir envoyer les périodiques à l'adresse suivante

Društvo matematičara i fizičara NR Hrvatske, Jugoslavija
Zagreb, Marulićev trg 19

AUX COLLABORATEURS DU »GLASNIK«

Les collaborateurs sont priés d'adresser les articles et la correspondance à la *Rédaction de »Glasnik matematičko-fizički i astronomski«, Zagreb, Marulićev trg 19.*

Les manuscrits doivent être écrits à la machine avec interligne sur un côté de la feuille. Les formules doivent être numérotées afin d'éviter leur répétition dans le résumé. Les auteurs étrangers sont invités de rédiger le résumé dans leur langue, la rédaction se chargeant de le traduire en croate.

Les auteurs reçoivent à titre gratuit 50 exemplaires de tirages à part.

SARADNICIMA »GLASNIKA«

Članke i dopise treba upućivati *Redakciji Glasnika matematičko-fizičkog i astronomskog, Zagreb, Marulićev trg 19.*

Članci neka su jezično korigirani i pisani strojem sa proredom na jednoj strani papira. Uz svaki članak neka je priložen sadržaj na kojem od svjetskih jezika i to približno do jedne trećine opsega članka. Pri tom neka se formule iz članka u sadržaju ne ponavljaju. Zato treba u članku formule numerirati i u sadržaju se na njih pozvati. Glasniku se mogu poslati i članci na kojem stranom svjetskom jeziku. U tom slučaju neka se priloži sadržaj na hrvatskom jeziku. Autori iz inozemstva mogu poslati uz članak i sadržaj na svom jeziku. Taj će sadržaj uredništvo prevesti na hrvatski.

Autori dobivaju 50 separata besplatno.

IZ REDAKCIJE

Rješenja zadataka, koja se šalju »Glasniku«, neka su pisana strojem ili čitljivo rukom na jednoj strani papira i to tako, da se rješenje svakog zadatka nalazi na posebnom papiru. Ako je uz rješenje potrebna slika, treba je nacrtati posebno, po mogućnosti na boljem papiru. Rješenja označena zvjezdicom objavit ćemo već u drugom narednom broju »Glasnika«. Te zadatke mogu riješiti i učenici srednjih škola, odnosno studenti prvih semestara. Neka se redakciji šalju i zadaci, ali samo originalni i sa pripadnim rješenjem.

VAŽNO UPOZORENJE

Mnoga strana naučna društva i ustanove traže u zamjenu kompletna godišta Glasnika, a Administracija Glasnika raspolaže od prvih godišta samo još sa nekim brojevima. Članovi odnosno pretplatnici Glasnika učinit će veliku uslugu Društvu matematičara i fizičara, ako uz odštetu odstupe Redakciji Glasnika matematičko-fizičkog, Zagreb, Marulićev trg 19/I. slijedeće brojeve Glasnika: T. 1. No. 1, 2; T. 3. No. 1, 2; T. 4. No. 1, 2; T. 5. No. 1; T. 6. No. 1—2.

Glavni i odgovorni urednik: Stanko Bilinski. Redakcioni odbor: Danilo Blanuša, Josip Goldberg, Đuro Kurepa, Branimir Marković, Mladen Paić, Ivan Supek, Stjepan Škreblin, Radovan Vernić. Tehnički urednik: Zlatko Janković. Adresa redakcije: Zagreb, Marulićev trg 19/I. — Štamparski zavod »Ognjen Prica«, Zagreb, Savska cesta 31.

II. KONGRES
MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ

održat će se u Zagrebu od 4.—9. X. 1954. Učesnici Kongresa, koji žele iznijeti na Kongresu saopćenja iz područja matematičko-fizičkih nauka, a također i saopćenja stručno-pedagoške prirode, neka odmah prijave ta saopćenja Kongresnom odboru pri Društvu matematičara i fizičara svoje republike, a najkasnije do 1. V. 1954. neka pošalju kratak sadržaj tih saopćenja. Svo dopisivanje u vezi s Kongresom slati na adresu: *Kongresni odbor pri Društvu matematičara i fizičara NRH, Zagreb, Marulićev trg 19/I.*
